۱ جلسه چهارم، گزاره های سازگار و قضیه فشردگی

در این جلسه می‌خواهم **لم فشردگی** [۱] را در منطق گزاره‌ها بیان و اثبات کنم. بنا به این لم (به بیان غیردقیق) **اگر بی‌نهایت پدیده داشته باشیم و بدانیم که هر تعداد متناهی از آنها می‌توانند همزمان رخ دهند، آنگاه تمام این پدیده‌ها می‌توانند همزمان با هم رخ دهند. در زیر این گفته را دقیق کرده‌ایم.**

تعریف ۱. گزاره های $\varphi_۱, \dots, \varphi_n$ را با هم **سازگار** [۲] می نامیم هرگاه رخداد همزمان آنها با هم تناقض نباشد؛ یعنی یک تابع ارزیابی $\mu : M \to \{۰, ۱\}$ موجود باشد به طوری که

$$\mu(\varphi_۱) = \mu(\varphi_۲) = \cdots = \mu(\varphi_n) = ۱.$$

به بیان دیگر هرگاه در جدول ارزش گزاره $\varphi_۱ \wedge \dots \wedge \varphi_n$ در حداقل یک سطر ارزش ۱ داشته باشیم. همچنین مجموعه‌ی متناهیِ Δ از گزاره‌ها را سازگار می‌خوانیم هرگاه گزاره‌ی $\bigwedge_{\phi\in\Delta} \phi$ سازگار باشد.

پس سازگار بودن یک تعداد متناهی گزاره، به معنی این است که وقوع همزمان آنها با هم تناقض نباشد. می‌دانیم که در منطق گزاره‌ها، گزاره‌ای به صورتِ $\phi_۱ \wedge \phi_۲ \wedge \dots$ (یعنی یک عطف بی‌نهایت) نداریم. با این حال در زیر به نحوه‌ی بررسی ارزش همزمان بی‌نهایت گزاره پرداخته‌ایم.

تعریف ۲. فرض کنید Σ مجموعه‌ای **نامتناهی** از گزاره‌ها باشد. مجموعه Σ را **متناهیاً سازگار** (متناهیا ارضاپذیر) [۳] می نامیم هرگاه **هر** زیرمجموعه‌ی متناهیِ $\Delta \subseteq \Sigma$ سازگار باشد. همچنین Σ را **سازگار** می‌خوانیم هرگاه تابع ارزیابی μ چنان موجود باشد که برای هر $\varphi \in \Sigma$ داشته باشیم $\mu(\varphi) = ۱$. به بیان غیرفنی، یعنی یک تابع ارزیابی وجود داشته باشد که بگوید $\bigwedge_{\varphi\in\Sigma} \varphi$ (که یک عطف نامتناهی است) امکان پذیر است.

قضیه ۳ (فشردگی)**.** اگر Σ متناهیاً سازگار باشد، آنگاه Σ سازگار است.

برای اثبات قضیه‌ی بالا نیاز به لم زُرن [۴] داریم (که شما آن را در درس مبانی ریاضی فراگرفته‌اید). فرض کنید یک مجموعه‌ی مرتب جزئی داشته باشیم و بدانیم که اگر از هر عنصر شروع کنیم و یک زنجیر صعودی بسازیم، عنصری هست که از تمام عناصر زنجیر ما بزرگتر است. آنگاه بنا به لم زرن، در مجموعه‌ی ما عنصری وجود دارد که در انتهای زنجیر ما قرار می‌گیرد (یعنی زنجیر را نمی‌توانیم از آن بیشتر ادامه دهیم). به بیان دیگر فرض کنید که یک درخت با نامتناهی شاخه داریم که هر شاخه تا بی‌نهایت پیش می‌رود. از طرفی در هر شاخه که هستیم می‌دانیم که عنصری بزرگتر از همه‌ی عناصر آن شاخه در مجموعه‌ی ما موجود است. در این صورت هر شاخه را اگر ادامه دهیم به یک **انتهای مشخص** می‌رسیم. بهتر است این لم را به صورت دقیق و ریاضی بیان کنیم. (در صورتی که در فهم لم زرن مشکل دارید، حتما به جزوه‌ی درس مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید.)

می‌گوییم $(A, \sqsubseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است هرگاه $\sqsubseteq$ یک رابطه‌ی ترتیبی باشد، با این تفاوت که لزوماً هر دو عنصر با هم قابل مقایسه نباشند. یک مجموعه‌ی مرتب جزئی را می‌توان به صورت یک درخت تجسم کرد. زیرمجموعه‌ی $B \subseteq A$ را یک زنجیر در A می‌خوانیم هرگاه هر دو عنصر در B با هم قابل مقایسه باشند. به بیان دیگر هرگاه

$$\forall a, b \in B \quad (a \sqsubseteq b) \vee (b \sqsubseteq a).$$

[۱] compactness

[۲] Consistent

[۳] finitely satisfiable

[۴] Zorn's lemma

لم ۴ (لم زُرْن)**.** فرض کنید $(A,\sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی **ناتهی** باشد به طوری که هر زنجیر $\{a_i\}_{i\in I}$ از عناصر A دارای یک کران بالا در A باشد. (یعنی $\exists a\in A\ \forall i\in I\ \ a_i\leq a$). آنگاه A دارای یک عنصر ماکزیمال است؛ یعنی

$$\exists a\in A\ \nexists x\in A\ \ x>a$$

لم زرن را در درسهای آینده ثابت خواهیم کرد. فعلاً بیایید به سمت اثبات قضیه‌ی فشردگی پیش برویم.

فرض کنید Σ یک مجموعه متناهیاً سازگار از گزاره‌ها باشد. هدفمان پیدا کردن یک تابع ارزیابی $\mu:M\to\{۰,۱\}$ است به طوری که برای هر $\varphi\in\Sigma$ داشته باشیم $\mu(\varphi)=۱$.

لم ۵. فرض کنید Σ یک مجموعه متناهیاً سازگار باشد. آنگاه یک مجموعه متناهیاً سازگارِ ماکزیمالِ $\Sigma'\supset\Sigma$ از گزاره‌ها موجود است. یعنی یک مجموعه‌ی Σ' موجود است، به طوری که

۱. $\Sigma'\supseteq\Sigma$

۲. Σ' متناهیاً سازگار است،

۳. هیچ مجموعه‌ای از گزاره‌ها نیست که متناهیاً سازگار باشد و شاملِ Σ' باشد.

اثبات به کمک لم زُرْن. مجموعه $\mathcal{A}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{A}=\{\Gamma\ \ |\Gamma\supseteq\Sigma\ \text{و}\ \text{مجموعه‌ای از گزاره‌هاست که متناهیاً سازگار است}\ \Gamma\ \}$$

دقت کنید که $\mathcal{A}\neq\emptyset$ زیرا $\Sigma\in\mathcal{A}$. روی $\mathcal{A}$ ترتیب جزئی زیر را تعریف کنید:

$$\Gamma_۱\sqsubseteq\Gamma_۲\Longleftrightarrow\Gamma_۱\subseteq\Gamma_۲.$$

فرض کنید $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر در $\mathcal{A}$ باشد. توجه کنید که برای هر $j\in I$ داریم $\Gamma_j\sqsubseteq\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ (یعنی این زنجیر کران بالا دارد؛ کافی است نشان دهیم که این کران بالا در $\mathcal{A}$ واقع است).

ادعا. $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i\in\mathcal{A}$.

اثبات ادعا. کافی است نشان دهیم که $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ متناهیاً سازگار است.

فرض کنید $\varphi_۱,\cdots,\varphi_n\in\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$. بنابراین

$$\begin{gathered}\exists i_۱\in I\quad \varphi_۱\in\Gamma_{i_۱}\\ \vdots\\ \exists i_n\in I\quad \varphi_n\in\Gamma_{i_n}\end{gathered}$$

بدون کاستن از کلیت فرض کنید $i_۱<i_۲<\cdots<i_n$. از آنجا که $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر است، در این صورت داریم: $\Gamma_{i_۱}\subseteq\cdots\subseteq\Gamma_{i_n}$؛ بنابراین $\varphi_۱,\cdots,\varphi_n\in\Gamma_{i_n}$. از آنجا که $\Gamma_{i_n}\in\mathcal{A}$ پس Γ_{i_n} متناهیاً سازگار است؛ پس $\varphi_۱,\cdots,\varphi_n$ با هم سازگارند.

پایان اثبات ادعا. □

پس دیدیم که $(\mathcal{A}, \sqsubseteq)$ در شرایط لم زرن صدق می‌کند. پس $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال است. این عنصر ماکزیمال، همان مجموعه‌ی Σ' است که به دنبال آن بودیم. **از این لحظه به بعد این مجموعه را Σ_{max} می‌نامیم.** $\square$

تمرین ۱. نشان دهید که برای هر گزاره دلخواهِ φ یا $\varphi \in \Sigma_{max}$ یا $\neg\varphi \in \Sigma_{max}$. (راهنمایی: اگر $\varphi \notin \Sigma_{max}$ نشان دهید که مجموعه $\Sigma_{max} \cup \{\neg\varphi\}$ متناهیاً سازگار است. از این نتیجه بگیرید که $\neg\varphi \in \Sigma_{max}$)

لمِ ۵ را با فرض شمارا بودن تعداد کل گزاره‌ها می‌توان راحت‌تر ثابت کرد. در این صورت برای یافتن مجموعه‌ی Σ_{max} یکی یکی به Σ گزاره اضافه می‌کنیم.

اثبات لمِ ۵ با فرض شمارا بودن تعداد کل گزاره‌ها. با فرض این که مجموعه‌ی همه گزاره ها شمارا و برابر با $\{\varphi_۰, \varphi_۱, \cdots\}$ باشد، ادعا می‌کنیم که برای هر گزاره‌ی φ یا $\Sigma \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار است یا $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ متناهیاً سازگار است. پس در هر مرحله‌ی i یا φ_i یا $\neg\varphi_i$ را به Σ اضافه می‌کنیم تا به یک مجموعه متناهیاً سازگار ماکزیمال برسیم.

برای اثبات ادعا، فرض کنیم $\Sigma \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار نباشد. پس مجموعه متناهی $\Delta_۰ \subseteq \Sigma$ موجود است به طوری که $\Delta_۰ \cup \{\varphi\}$ ناسازگار است. یعنی اگر μ یک تابع ارزیابی باشد که برای هر $\psi \in \Delta_۰$ داشته باشیم $\mu(\psi) = ۱$ آنگاه $\mu(\varphi) = ۰$. ادعا می‌کنیم که $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ متناهیا سازگار است. فرض کنید $\Delta \subseteq \Sigma$ مجموعه‌ای متناهی باشد. ادعا می‌کنیم که $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ سازگار است. می‌دانیم که $\Delta \cup \Delta_۰$ سازگار است (زیرا Σ متناهیاً سازگار است). پس یک ارزیابی μ وجود دارد که برای هر $\psi \in \Delta \cup \Delta_۰$ داریم $\mu(\psi) = ۱$. از آنجا که μ روی $\Delta_۰$ برابر ۱ است بنابر بالا $\mu(\varphi) = ۰$؛ یعنی $\mu(\neg\varphi) = ۱$. پس $\Delta \cup \Delta_۰ \cup \{\neg\varphi\}$ سازگار است یعنی $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ سازگار است.

$\square$

حال همه‌ی مقدمات لازم را برای اثبات لم فشردگی در اختیار داریم.

اثبات لمِ فشردگی. فرض کنید Σ یک مجموعه متناهیاً سازگار از گزاره ها باشد. بنابر لم قبل یک مجموعه‌ی متناهیاً سازگار ماکزیمال $\Sigma_{max} \supseteq \Sigma$ وجود دارد. در تمرین ۱ دیدیم که برای هر گزاره φ یا $\varphi \in \Sigma_{max}$ یا $\neg\varphi \in \Sigma_{max}$. تابع ارزیابی $\mu : M \to \{۰, ۱\}$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$\mu(p) = ۱ \iff p \in \Sigma_{max}.$$

ادعا می‌کنیم که برای هر گزاره‌ی دلخواهِ φ داریم

$$\mu(\varphi) = ۱ \iff \varphi \in \Sigma_{max}$$

$\square$

این ادعا را با استقراء روی ساخت گزاره‌ها ثابت می‌کنیم. یعنی نشان می‌دهیم که حکم ادعا برای گزاره‌های اتمی درست است؛ اگر برای گزاره‌های $\psi_۱, \psi_۲$ درست باشد برای گزاره‌ی $\psi_۱ \wedge \psi_۲$ درست است؛ و اگر برای گزاره‌ی ψ درست باشد، برای گزاره‌ی $\neg\psi$ هم درست است. از اینها نتیجه می شود که حکم مورد نظر برای همه‌ی گزاره‌ها درست است.

فرض کنید $\varphi \in \Sigma_{max}$ یک گزاره اتمی باشد. آنگاه بنابر **تعریف** μ داریم

$$\mu(\varphi) = ۱ \Leftrightarrow \phi \in \Sigma_{max}.$$

فرض کنید حکم برای ψ درست باشد. پس

$$\psi \in \Sigma_{max} \Leftrightarrow \mu(\psi) = ۱.$$

بنا به تمرینِ ۱ می‌دانیم که

$$\neg\psi \in \Sigma_{max} \Leftrightarrow \psi \notin \Sigma_{max}.$$

پس

$$\neg\psi \in \Sigma_{max} \Leftrightarrow \mu(\neg\psi) = ۱.$$

سرآخر فرض کنید که $\varphi = \psi_۱ \wedge \psi_۲$ و حکم برای $\psi_۱, \psi_۲$ درست باشد. اگر $\phi \in \Sigma_{max}$ آنگاه بنا به ماکزیمال بودن و سازگاری داریم $\psi_۱, \psi_۲ \in \Sigma_{max}$. پس

$$\mu(\psi_۱) = \mu(\psi_۲) = ۱ = \mu(\psi_۱ \wedge \psi_۲).$$

تمرین ۲. برای به پایان رساندن اثبات نشان دهید که اگر $\phi = \psi_۱ \wedge \psi_۲ \notin \Sigma_{max}$ آنگاه $\mu(\phi) = ۰$.

پس ثابت کردیم که μ به همه‌ی گزاره‌های موجود به Σ_{max} ارزش ۱ می دهد. واضح است که ارزش گزاره‌های موجود در Σ نیز از نظرِ μ برابر با یک است و این اثبات حکم را به پایان می‌رساند.

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.