۱ جلسه‌ی هفدهم، قدم دوم و اوج اثبات

در جلسه‌ی قبل نشان دادیم که هر تئوریِ متناهیاًسازگار را می‌توان در یک تئوریِ متناهیاًسازگارِ هنکینی نشاند. نیز گفتیم که یک تئوری T را کامل می‌نامیم، هرگاه برای هر Lجمله‌ی φ داشته باشیم $\neg\varphi \in T$ یا $\varphi \in T$. لم زیر را در جلسه‌ی قبل با فرض شمارا بودن زبان ثابت کردیم. اینک اثباتی برای آن بدون فرض شمارا بودن زبان و بر پایه‌ی لم زُرن آورده‌ایم.

لم ۱. اگر T متناهیاً سازگار باشد، آنِ گاه تئوری $T \subseteq T^*$ موجود است به طوری که T^* متناهیاً سازگار و کامل است.

اثبات. مجموعه‌ی Σ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\Sigma = \{T' \supseteq T \mid T' \text{متناهیاً سازگار است}\}$$

روی Σ ترتیب $\subseteq$ را در نظر بگیرید؛ یعنی تعریف کنید:

$$T' \leq T'' \Leftrightarrow T' \subseteq T''$$

فرض کنید $\{T_\lambda\}_{\lambda \in I}$ یک زنجیر از اعضای Σ باشد (توجه کنید که I یک مجموعه ی مرتب خطی است)؛ پس

$$\lambda < \lambda' \Rightarrow T_\lambda \subseteq T'_\lambda$$

ادعا.

$$\bigcup_{\lambda \in I} T_\lambda \in \Sigma$$

اثبات ادعای بالا را به عنوان تمرین رها می‌کنم (باید ثابت کنید که $\bigcup_{\lambda \in I} T_\lambda \in \Sigma$ متناهیاًسازگار است). حال شرایط لم زرن [1] برقرار است، بنابراین Σ دارای یک عنصر ماکسیمال به نام T^* است. دقت کنید که T^* متناهیاًسازگار است زیرا $T^* \in \Sigma$.

ادعا. T^* کامل است.

اثبات. فرض کنید φ یک Lجمله باشد و

$$T \cup \{\varphi\} \text{ متناهیاً ناسازگار باشد} \qquad (۱)$$

$$T \cup \{\neg\varphi\} \text{ متناهیاً ناسازگار باشد} \qquad (۲)$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم که جملات $\psi_1, \dots, \psi_n \in T$ موجودند به طوری که

$$\vdash \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \wedge \varphi)$$

پس

$$\vdash \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \vee \neg\varphi$$

پس

$$\vdash \varphi \to \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \qquad (*)$$

[1] به جزوه‌ی مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید

و به طریق مشابه از (۲) نتیجه می‌شود که

$$\vdash \neg\varphi \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \qquad\qquad (**)$$

بنابه $(*),(**)$ و تاتولوژی

$$(p \to q) \wedge (\neg p \to q) \to q$$

از قوانین دستگاه هیلبرت نتیجه می گیریم که

$$\vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$

و این نتیجه متناقض با سازگاری T است. □

در این جا قدم بزرگ دوم برای اثبات قضیه‌ی تمامیت برداشته شد: **هر تئوری متناهیاً سازگار در یک تئوری متناهیاً سازگار کامل می نشیند.** از ترکیب متوالیِ قدم اول و قدم دوم به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

نتیجه ۲. هر تئوری متناهیاًسازگار در یک تئوری متناهیاً سازگار کامل هنکینی می نشیند. (اثبات در کلاس تمرین)

فرض کنید T یک تئوریِ متناهیاًسازگار باشد، آنگاه T در یک تئوریِ متناهیاًسازگارِ هنکینی می‌نشیند؛ اگر ثابت کنیم که آن تئوری دارای مدل است، طبیعتاً تئوری ما نیز دارای مدل خواهد بود. پس با اثبات قضیه‌ی زیر، اثبات تمامیت به پایان می‌رسد.

قضیه ۳. هر تئوریِ متناهیاًسازگارِکاملِ‌هنکینی دارای مدل است (در زبان $L \cup C$).

$$\exists \mathfrak{M}\ \forall \varphi \in T\ \ \mathfrak{M} \models \varphi$$

اثبات. در طی اثبات زیر از یک مجموعه شروع می‌کنیم، آن را تبدیل به یک ساختار می‌کنیم و سپس بررسی می‌کنیم که آیا مدلی برای تئوری مورد نظر ما هست یا نه.

مجموعه‌ی M' را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$M' = \{a_c |\ c \in C\}$$

دقت کنید که در مجموعه‌ی بالا برای هر ثابتِ $c \in C$ یک شیءِ a_c کنار گذاشته‌ایم. روی M' رابطه‌ی زیر را تعریف کنید.

$$a_c \approx a'_c \ \Leftrightarrow\ T \vdash c = c'$$

(به عنوان تمرین با استفاده از اصول تساوی ثابت کنید که) $\approx$ یک رابطه ی هم ارزی روی M' است. حال مجموعه‌ی M را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$M = M'/\approx$$

پس M را مجموعه‌ی کلاسهای هم‌ارزی روی M' با رابطه‌ی $\approx$ گرفته‌ایم. به بیان دیگر، مجموعه‌ی ثوابت را به صورت جهانِ ساختار مورد نظرمان گرفته‌ایم با این فرض که دو عنصرِ این جهان در واقع یک عنصر هستند هرگاه تئوریِ T چنین گفته باشد! در ادامه، بقیه چیزها را نیز به گردنِ خودِ تئوریِ T خواهیم انداخت!

تعبیر علائم زبانی در M.

تعبیر ثوابت:

$$c^M = a_c$$

تعبیر توابع:

فرض کنید $f(x_1, ..., x_n) \in L$. تعریف می کنیم:

$$f^M(a_{c_1}, ..., a_{c_n}) = a_{c_{n+1}} \Leftrightarrow T \vdash f(c_1, ..., c_n) = c_{n+1}$$

دقت کنید که

$$T \vdash f(c_1, ..., c_n) = f(c_1, ..., c_n)$$

همچنین (بنا به لم سور وجودی)

$$\vdash f(c_1, ..., c_n) = f(c_1, ..., c_n) \to \exists x f(c_1, ..., c_n) = x$$

پس

$$T \vdash \exists x f(c_1, ..., c_n) = x$$

حال بنا به هنکینی بودنِ T ثابتِ C_{n+1} موجود است به طوری که

$$T \vdash_{L \cup C} \exists x f(c_1, ..., c_n) = x \to f(c_1, ..., c_n) = c_{n+1}.$$

پس

$$T \vdash f(c_1, ..., c_n) = c_{n+1}.$$

بنابراین تابعِ ما واقعاً هر عنصر را به جائی می‌برد!

خوش تعریفی تابع f. خوش‌تعریف بودن، یعنی تابع بودن. باید ثابت کنیم که

$$(a_{c_1} = a_{c'_1} \wedge ... \wedge a_{c_n} = a_{c'_n} \wedge) \Rightarrow f^M(a_{c_1}, ..., a_{c_n}) = f^M(a_{c'_1}, ..., a_{c'_n})$$

عبارت بالا بنا به تعریف تابع و بنا به اصول تساوی برقرار است.

تعبیر روابط: تعریف می‌کنیم

$$R^M(a_{c_1}, ..., a_{c_n}) \Leftrightarrow T \vdash R(c_1, ..., c_n)$$

دوباره خوش‌تعریفی از اصول دستگاه هیلبرت نتیجه می‌شود.

پس از یک مجموعه از ثوابت شروع کردیم و به یک Lساختار رسیدیم:

$$\mathfrak{M} = (M, f^M, R^M, C^M)_{f,R,C \in L \cup C}$$

تنها چیزی که باقی مانده، این است که ثابت کنیم که $\mathfrak{M}$ مدلی برای تئوری T است؛ یعنی برای هر جمله‌ی $\phi \in T$ داریم $\mathfrak{M} \models \phi$.

ادعا. برای هر $\varphi \in T$ داریم

$$\mathfrak{M} \models \varphi$$

ادعای بالا را در جلسه‌ی بعد با استقراء روی ساخت فرمولها ثابت خواهیم کرد. □

از خانم گلنوش خورسندی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.