# ۱ جلسه‌ی شانزدهم، تئوریهای هنکینی

قرارمان بر اثبات قضیه‌ی زیر بود:

**قضیه ۱.** فرض کنید $T$ یک تئوری متناهیاً سازگار باشد، آنگاه $T$ دارای مدل است.

قضیه‌ی بالا یکی از قضایای اساسی ریاضیات است که اثبات آن توسط یک ریاضیدان بزرگ به نام گودل صورت گرفته است. سعی من بر این است که وقت کافی روی اثبات این قضیه بگذارم، لکن این از سختی اثبات نخواهد کاست.

دقت کنید که «متناهیاً سازگار بودن» یک تئوری را با استفاده از دستگاه هیلبرت تعریف کرده‌ایم. پس برای اثبات حکم قضیه، یعنی برای یافتن مدل برای تئوری مورد نظر قضیه، **تنها از اصول دستگاه هیلبرت استفاده خواهیم کرد.**

یادآوری می‌کنم که اگر $\varphi$ یک جمله باشد و $T$ یک تئوری، آنگاه می‌نویسیم $T \vdash \varphi$ هرگاه جملات $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ موجود باشند به طوری که

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi.$$

متناهیاً سازگار بودن، معادل با **متناقض نبودن** است. هر چند ما از این نماد چندان استفاده‌ای نخواهیم کرد، ولی عموماً می‌گویند $T$ تناقض می‌دهد و می‌نویسند $T \vdash \perp$ هرگاه جمله‌ای مانند $\phi$ نه لزوماً در $T$ موجود باشد به طوری که $T \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

**تمرین ۱.** (با استفاده از اصول دستگاه هیلبرت) نشان دهید که $T$ متناهیاً سازگار است اگر و تنها اگر $T \not\vdash \perp$.

**تعریف ۲.** می‌گوییم تئوری $T$ در زبانِ $\mathcal{L} \cup C$ یک تئوری هنکینی [۱] (یا یک تئوری دارای شاهد) است هرگاه برای هر $\mathcal{L} \cup C$فرمولِ $\varphi$ [۲] ثابت $c_\varphi$ موجود باشد به طوری که

$$T \vdash \exists x \varphi \rightarrow \varphi(c_\varphi)$$

پس در یک تئوری هنکینی، زبان آنقدر غنی هست که بتواند برای تمام فرمولهای وجودی شاهدی بیاورد. در لم زیر نشان داده‌ایم که هر تئوریِ متناهیاً سازگار را می‌توان در یک تئوریِ متناهیاً سازگارِ هنکینی نشاند:

**لم ۳.** فرض کنید $T$ یک تئوری متناهیاً سازگار باشد. آنگاه یک تئوری $T \subseteq T'$ موجود است به طوری که

۱. $T'$ هنکینی است.

۲. $T'$ متناهیاً سازگار است.

*اثبات.* نخست عبارت زیر را ثابت می‌کنیم:

فرض کنید $\phi(x)$ یک $L$فرمول با متغیرِ آزادِ $x$ باشد و $c \notin L$، آنگاه تئوریِ $T \cup \{\exists x \phi(x) \rightarrow \phi(c)\}$ نیز متناهیاً سازگار است.

عبارت بالا را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید $T \cup \{\exists x \phi(x) \rightarrow \phi(c)\}$ سازگار نباشد. آنگاه جملاتِ $\psi_1, \ldots \psi_n \in T$ چنان یافت می‌شوند که

$$\vdash \neg\big((\psi_1 \wedge \ldots \psi_n) \wedge \exists x \phi(x) \rightarrow \phi(c)\big) \quad (*)$$

ثابت می‌کنیم که عبارت $(*)$ منجر به

$$\vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$$

می‌شود که این با متناهیاً سازگار بودنِ $T$ متناقض است.

---

[۱] Henkin theory

[۲] دقت کنید که نه $L$ فرمول

۱. $\neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \vee \neg(\exists x\phi(x) \to \phi(c))$ (بنا به $(*)$ و بنا به تاتولوژیِ $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

۲. $\neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \vee \neg(\neg\exists x\phi(x) \vee \phi(c))$ بنا به ۱ و با توجه به تاتولوژیِ $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$.

۳. $\neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \vee (\exists x\phi(x) \wedge \neg\phi(c))$ بنا به ۲ و با توجه به تاتولوژیِ $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

۴. $\big(\neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n) \vee \exists x\phi(x)\big) \wedge \big(\neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n) \vee \neg\phi(c)\big)$ بنا به مورد ۳ و با استفاده از تاتولوژیِ $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

۵. $(\neg\exists x\phi(x) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)) \wedge (\phi(c) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n))$. بنا به ۴ و با توجه به تاتولوژیِ $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$.

۶. $(\neg\exists x\phi(x) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n))$ بنا به مورد قبل و تاتولوژیِ $p \wedge q \to p$.

۷. $(\phi(c) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n))$ بنا به مورد ۵ و تاتولوژیِ $p \wedge q \to q$.

حال دقت کنید که بنا به لمی از جلسه‌ی قبل اگر $\vdash_{L\cup c} \chi(c)$ آنگاه $\vdash_L \chi(x)$.

۸. $\phi(x) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$ بنا به مورد ۷ و نکته‌ی بالا.

۹. $\exists x\phi(x) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$ بنا به مورد ۸ و لم معرفی سور وجودی.

۱۰. $\neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$ بنا به مورد ۹ و مورد ۶ و تاتولوژیِ زیر

$$((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$$

بحث بالا را می‌توان (به آسانی) به صورتی که در تمرین زیر بیان شده است، تعمیم داد:

**تمرین ۲.** اگر تئوری $T$ متناهیاً سازگار باشد و $C = \{c_\varphi | \phi \text{ یک } L \text{ فرمول}\}$ مجموعه‌ای از ثوابت جدید باشد، آنگاه

$$T' = T \cup \{\exists x\varphi \to \varphi(c_\varphi) | c_\varphi \in C\}$$

متناهیاً سازگار است.

به ادامه‌ی اثباتِ لم مورد نظر می‌پردازیم. می‌خواستیم ثابت کنیم که اگر $T$ متناهیاً سازگار باشد آنگاه یک تئوریِ متناهیاً سازگار و هنکینی $T \subseteq T'$ یافت می‌شود. قرار دهید

$$T_1 = T \cup \{\exists x\varphi \to \varphi(c_\varphi) | \phi \text{ یک } L\text{فرمول}\}$$

$$C_1 = \{c_\varphi | \phi \text{ یک } L\text{فرمول}\}$$

در تمرین قبل نشان دادیم که $T_1$ نسبت به $L$فرمولها هنکینی است. قرار دهید

$$T_2 = T_1 \cup \{\exists x\varphi \to \varphi(c_\varphi) | \varphi \text{ یک } L \cup C_1 \text{ فرمول}\}$$

مشابه تمرین، تئوری $T_2$ نیز متناهیاً سازگار است و نسبت به $L \cup C_1$ فرمولها، هنکینی است. به همین ترتیب با استقراء تئوری‌های $T_n$ را برای $n \in \mathbb{N}$ بسازید به طوری که

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$$

هر $T_i$ متناهیاً سازگار است و نسبت به $L \cup C_1 \cup \ldots C_{i-1}$ فرمولها، هنکینی است. قرار دهید

$$T = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$$

$T$ یک تئوری هنکینیِ متناهیاً سازگار در زبانِ $L \cup \bigcup C_i$ است. (جزئیات را بررسی کنید). $\square$

**در اینجا اولین قدم مهم برای اثبات قضیه‌ی تمامیت برداشته شد. خلاصه می‌کنیم که هر تئوریِ متناهیاً سازگار، زیرمجموعه‌ی یک تئوریِ متناهیاً سازگارِ هنکینی است.** یک قدم مهم دیگر تا اثبات این قضیه باقی مانده است.

**تعریف ۴.** تئوری $T$ را در زبانِ $L$ **کامل** می‌خوانیم هرگاه برای هر $L$فرمولِ $\varphi$ داشته باشیم $\varphi \in T$ یا $\neg\varphi \in T$.

در ادامه نشان داده‌ایم که هر تئوریِ متناهیاًسازگار در یک تئوریِ متناهیاًسازگارِ کامل می‌نشیند.

**لم ۵.** برای هر تئوری متناهیاً سازگار $T$ یک تئوری $T \subseteq T'$ پیدا می‌شود به طوری که

۱. $T'$ متناهیاً سازگار است.

۲. $T'$ کامل است.

*اثبات.* فعلاً قضیه را با شرط شمارا بودن زبان ثابت می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ شمارشی از فرمولها باشد. اگر $T$ یک تئوری متناهیاً سازگار باشد، نشان می‌دهیم که برای هر $\mathcal{L}$فرمولِ $\varphi$ یا $T \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار است یا $T \cup \{\neg\varphi\}$ (و البته این «یا» مانع جمع است، زیرا در غیر این صورت تئوری مورد نظر متناهیاً ناسازگار می‌شود). به بیان دیگر نشان می‌دهیم که اگر $T \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار نباشد آنگاه $T \cup \{\neg\varphi\}$ متناهیاً سازگار است. اگر $T \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار نباشد، فرمولهای $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T$ موجودند به طوری که $\vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \wedge \varphi)$ یعنی

$$\star \quad \vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \vee \neg\varphi$$

حال اگر $T \cup \{\neg\varphi\}$ هم ناسازگار باشد به طور مشابه

$$\star\star \quad \vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \vee \varphi$$

پس فرمولهای زیر قابل اثبات هستند (به ترتیب بنا به * و **)

$$\varphi \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$
$$\neg\varphi \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$

بنا به تاتولوژی زیر

$$\big((p \to q) \wedge (\neg p \to q)\big) \to q$$

از دو عبارت بالا به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

$$\vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$

و این با متناهیاً سازگار بودن $T$ تناقض دارد.

برای اثبات لم با فرض شمارا بودن زبان کافی است تئوریهای $T_i$ را به صورت زیر بسازیم

$$T_1 = \begin{cases} T \cup \{\varphi_1\} & \text{در صورتی که } T \cup \{\varphi_1\} \text{ متناهیاً سازگار باشد} \\ T \cup \{\neg\varphi_1\} & \text{در صورتی که } T \cup \{\neg\varphi_1\} \text{ متناهیاً سازگار باشد} \end{cases}$$

به همین ترتیب

$$T_i = \begin{cases} T_{i-1} \cup \{\varphi_i\} & \text{در صورتی که } T_{i-1} \cup \{\varphi_i\} \text{ متناهیاً سازگار باشد} \\ T_{i-1} \cup \{\neg\varphi_i\} & \text{در صورتی که } T_{i-1} \cup \{\neg\varphi_i\} \text{ متناهیاً سازگار باشد} \end{cases}$$

آنگاه تئوری $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$ متناهیاً سازگار و کامل است. $\square$