۱ جلسه یازدهم، ادامه‌ی نظریه‌ی مدل

در جلسات قبل با مفهوم درست بودن یک فرمول در یک ساختار تحت یک ارزیابی مشخص آشنا شدیم. در نظریه‌ی مدل معمولاً نمادها را به صورت زیر ساده‌سازی می‌کنیم.

فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و $a_۱, \cdots, a_n \in M$ و $\varphi(x_۱, \cdots, x_n)$ یک فرمول با متغیرهای آزاد در میان $x_۱, \cdots, x_n$ باشد. اگر β یک ارزیابی از متغیرها در ساختارِ $\mathfrak{M}$ باشد و $\beta(x_i) = a_i$ آنگاه به جای $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta]$ می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models \varphi(a_۱, \cdots, a_n)$. همچنین اگر $t(x_۱, \ldots, x_n)$ یک ترم باشد آنگاه به جای $t^{\mathfrak{M}}[\beta]$ می‌نویسیم $t^{\mathfrak{M}}(a_۱, \cdots, a_n)$.

تمرین ۱. لم جایگذاری را با نماد های جدید بیان کنید.

در جلسه‌ی قبل با مفهومِ تئوری‌ها آشنا شدیم. در این جلسه چند مثال دیگر از تئوریها را آورده‌ایم.

مثال ۱. در یک زبان مناسبِ $\mathcal{L}$ یک تئوری T برای مجموعه های نامتناهی بنویسید.(یعنی تئوری T به گونه ای باشد که اگر $\mathfrak{M} \models T$ آنگاه M مجموعه ای نامتناهی باشد؛ به بیانی دیگر، مجموعه‌های متناهی را اصل بندی کنید.)

پاسخ. قرار دهید $\mathcal{L} = \emptyset$؛ یعنی زبانی را در نظر بگیرید که هیچ نماد تابعی یا رابطه‌ای یا ثابت در آن وجود ندارد. در چنین زبانی تنها باید با استفاده از ادوات منطقی و متغیرها جمله ساخت. جمله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi_۲ : \exists x_۱, x_۲ \;\; x_۱ \neq x_۲$$

$$\varphi_۳ : \exists x_۱, x_۲, x_۳ \;\; (x_۱ \neq x_۲) \wedge (x_۱ \neq x_۳) \wedge (x_۲ \neq x_۳)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n : \exists x_۱, \cdots, x_n \;\; \bigwedge_{i \neq j}(x_i \neq x_j)$$

$$\vdots$$

قرار دهید $T = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. دقت کنید که هر جمله‌ی φ_n بیانگر این است که در جهان مدلِ مورد نظر ما، حداقل n عنصر موجود است. دقت کنید که اگر آنگاه اگر $\mathfrak{M} \models T$ آنگاه M برای هر عدد طبیعیِ n حداقل دارای n عضو است؛ پس M نامتناهی است. □

در مثال بالا، مجموعه‌های نامتناهی را **اصل‌بندی** کردیم؛ یعنی مجموعه‌ای از اصول نوشتیم که هر **مدل** از آنها قطعاً یک مجموعه‌ی نامتناهی است و هر مجموعه‌ی نامتناهی یک مدل از آنهاست. یکی از موضوعات مورد مطالعه در نظریه‌ی مدل، یافتن اصل‌بندی‌های مناسب برای ساختارهای مختلف است.

مثال ۲. آیا می توان مجموعه‌های متناهی را اصل بندی کرد؛ یعنی آیا می‌توان یک تئوری T نوشت به طوری که $\mathfrak{M} \models T$ اگروتنهااگر M متناهی باشد؟ (روی این سوال فکر کنید ولی پاسخ آن را در درس های آینده خواهیم دید).

تمرین ۲. قرار دهید $\mathcal{L} = \{E\}$ که در آن E یک نماد رابطه‌ای دوموضعی است. تئوری T را چنان بنویسید که اگر $\mathfrak{M} \models T$ آنگاه

۱. $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه هم ارزی باشد که هر کلاس $E^{\mathfrak{M}}$ دقیقاً دو عضو دارد.

۲. $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ دقیقاً یک کلاس n عضوی دارد.

۳. $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد که هر کلاس آن نامتناهی است.

۴. $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد که دقیقاً دو کلاس دارد، یکی از این دو کلاس نامتناهی است و دیگری دقیقاً ۵ عضو دارد.

.

۱.۱ کامل بودن یک تئوری

از درس جبر یادآوری می‌کنم که منظور از میدان، ساختاری به صورت $(K, +, \cdot, ۰, ۱)$ است که در آن K با عمل جمع و عمل ضرب (وقتی که صفر را کنار بگذاریم) تشکیل گروه آبلی می‌دهد و ضرب نسبت به جمع ویژگی پخش‌پذیری دارد. ساختارهای زیر میدان هستند: $(\mathbb{C}, +, \cdot, ۰, ۱)$، $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot, \bar{۰}, \bar{۱})$، $(\mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱)$، $(\mathbb{Q}, +, \cdot, ۰, ۱)$. دقت کنید که $\mathbb{Z}_p$ میدان متشکل از اعداد صحیح در پیمانه‌ی p را نشان می‌دهد که یک میدان متناهی است. منظور از یک میدان بسته‌ی جبری، میدانی است مانند میدان اعداد مختلط، که در آن هر معادله‌ی چندجمله‌ای با ضرایب در آن میدان دارای جواب است. (اینکه در میدان اعداد مختلط هر چندجمله‌ای به طور کامل تجزیه‌ی می‌شود و همه‌ی ریشه‌هایش در آن میدان است، **قضیه‌ی اساسی جبر** نام دارد که اثباتش را می‌توانید در درسهای جبر یا توابع مختلط فرابگیرید). دقت کنید که میدان اعداد حقیقی، بسته‌ی جبری نیست زیرا در آن معادله‌ای مانند معادله‌ی $x^۲ + ۱ = ۰$ جواب ندارد.

در زبان حلقه ها، یعنی در زبانِ $\mathcal{L} = \{+, \cdot, ۰, ۱\}$ تئوری **میدان های بسته جبری** با مشخصه ی ۰ به صورت زیر است:

۱ــ اصولی که بگوید فضای مورد نظر با عمل جمع یک گروه آبلی می سازد:

$$\forall x, y, z \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$\forall x, y \quad x + ۰ = ۰ + x = x$$
$$\forall x \exists y \;\; x + y = ۰$$
$$\forall x, y \;\; x + y = y + x$$

۲ــ اصولی که بگوید فضای مورد نظر با عمل ضرب یک گروه آبلی می سازد:

$$\forall x, y, z \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$
$$\forall x, y \quad x \cdot y = y \cdot x$$
$$\forall x \quad (x \neq ۰ \rightarrow \exists y \, x \cdot y = ۱)$$
$$\forall x \quad x \cdot ۱ = ۱ \cdot x = x$$

۳ــ رابطه ی جمع با ضرب:

$$\forall x, y, z \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

۴ــ مشخصه صفر:

$$1+1\neq 0$$
$$1+1+1\neq 0$$
$$\vdots$$
$$1+1+1+\cdot+1\neq 0$$
$$\vdots$$

۵ـ اینکه صفر و یک دو عنصر متمایز هستند:

$$1\neq 0$$

۶ـ بسته جبری بودن:

$$\forall a_0, a_1 \;\; \exists x a_0 + a_1 x = 0$$
$$\vdots$$
$$\forall a_0, \cdots, a_n \;\; \exists x a_0 + a_1 x + \cdot + a_n x = 0$$
$$\vdots$$

تئوری بالا را با ACF نشان می دهیم [1]. همان طور که قضیه‌ی اساسی جبر می‌گوید، $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models ACF$؛ یعنی ACF یک تئوری است که اعداد مختلط با اعمال جمع و ضرب روی آن، مدلی برای آن است. یک سوال منطقی در این جا این است که تئوریِ ACF تا چه اندازه‌ای در بیان ویژگی‌های اعداد مختلط تواناست. در زیر در این باره بیشتر توضیح داده‌ایم (و درسهای آینده باز هم بیشتر دراین باره خواهیم گفت).

دقت کنید که برای هر Lساختار یک اصل‌بندیِ‌طبیعی وجود دارد:

تعریف ۳. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشد. تئوریِ کاملِ Lساختارِ $\mathfrak{M}$ به صورت زیر نشان داده و تعریف می‌شود:

$$Th(\mathfrak{M}) = \{\varphi | \mathfrak{M} \models \varphi\}$$

دقت کنید که تئوریِ کامل یک ساختار، حاوی تمامِ جملاتی است که در آن ساختار درستند؛ به بیان دیگر همه‌ی اتفاقاتی که در آن ساختار رخ می‌دهند در این تئوری بیان شده‌اند. بنابراین اکر T تئوری کامل یک $\mathcal{L}$ساختار باشد آنگاه برای هر $\mathcal{L}$ جمله φ یا $\varphi \in T$ یا $\neg\varphi \in T$؛ علت، طبیعی است؛ زیرا برای هر جمله‌ای، یا خودِ آن جمله یا نقیضِ آن در Lساختار مورد نظر درست است.

حال تئوری کامل اعداد مختلط را در نظر بگیرید: $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$. واضح است که $\mathbb{C} \models Th(\mathbb{C})$؛ نیز گفتیم که $\mathbb{C} \models ACF$. یعنی اعداد مختلط، مدلی برای هر دوی این تئوری‌هاست. قضیه‌ای در نظریه‌ی مدل بیان می‌کند که این دو تئوری مدلهای یکسانی دارند (یعنی هر مدلی از هر کدام، مدلی از دیگری است).

قضیه ۴ (رابینسون). تئوری ACF با تئوریِ کاملِ اعداد مختلط، هم‌ارز است؛ یعنی هر مدلی از تئوری کامل اعداد مختلط، یک مدل از ACF است و هر مدلی از ACF یک مدل از تئوری کامل اعداد مختلط است.

[1] algebraically closed fields

نتیجه‌ی قضیه‌ی بالا این است که هر جمله‌ای که در اعداد مختلط درست باشد، در هر مدل دیگری از ACF نیز درست است و هر جمله‌ای که درباره‌ی اعداد مختلط نادرست باشد، در هر مدل دیگری از ACF نیز نادرست است. به بیان دیگر ACF اعداد مختلط را **به طور کامل** اصل‌بندی می‌کند.

دقت کنید که مجموعه‌ی اصولِ ACF مجموعه‌ی نسبتاً کوچکی است و تعداد اصول آن از تعداد همه‌ی جملات درست در اعداد مختلط بسیار کمتر است. همچنین مجموعه‌ی این اصول را می‌توان توسط یک الگوریتم نوشت. [2]

یک سوال طبیعی این است که کدام بخشهای دیگر ریاضیات دارای اصل‌بندی کامل هستند. ساختارِ اعداد طبیعی، $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $T = Th(\mathfrak{N})$. آیا می توان یک تئوری کامل برای اعداد طبیعی نوشت (یک تئوری که بتوان آن را توسط یک الگوریتم تولید کرد). برای اصل‌بندی اعداد طبیعی تلاشهای زیادی شده است. مهمترین دستگاه اصول برای اعداد طبیعی، اصول پئانوست، که در زیر آنها را آورده‌ایم. اصول پئانو ساختار اعداد طبیعی را در زبانِ $L = \{+, \cdot, 0, s\}$ اصل‌بندی می‌کند که در آن s یک نماد تابعی برای تابع تالی ($x \mapsto x + 1$) است.

$$\forall x \;\; s(x) \neq 0$$
$$\forall x \;\; (x \neq 0 \rightarrow \exists y \;\; x = s(y))$$
$$\forall x \;\; x + 0 = x$$
$$\forall x, y \;\; x + s(y) = s(x + y)$$
$$\forall x \;\; x \cdot 0 = 0$$
$$\forall x, y \;\; x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

شمای اصول استقرا (برای هر فرمولِ φ)

$$\forall \bar{w} \big(\varphi(\bar{w}, 0) \wedge \forall x (\varphi(\bar{w}, x) \rightarrow \varphi(\bar{w}, s(x))) \rightarrow \forall x \;\; \varphi(\bar{w}, x)\big)$$

دقت کنید که مورد آخر، یک عدد اصل نیست؛ بلکه شمائی از اصول است. یعنی برای هر فرمول φ یک اصل بدان صورت در نظر گرفته شده است.

متأسفانه مجموعه‌ای اصول پئانو برای اعداد طبیعی، مجموعه‌ی کاملی نیست. جملاتی پیدا می‌شوند که در اعداد طبیعی درستند ولی در همه‌ی مدلهای دیگر این اصول درست نیستند (برای مثال قضیه‌ی پاریس و هرینگتون) را ببینید.

پروژه ۵. درباره‌ی قضیه‌ی پاریس و هرینگتون تحقیق کنید.

در درسهای آینده، به درک بهتری از کامل بودن یک تئوری خواهیم رسید.

ایزومرفیسم

نظریه‌ی مدل بستر مناسبی برای مطالعه‌ی شاخه‌های دیگری ریاضی بخصوص جبر است. بسیاری مفاهیم جبری دارای تعمیمی در نظریه‌ی مدل هستند.

یکی از ویژگی‌های مهمِ ACF این است که هر میدان دیگری که اندازه‌ی آن $2^{\aleph_0}$ باشد و بسته‌ی جبری باشد، دقیقاً یکی کپی از میدان اعداد مختلط است؛ یعنی تنها یک میدان بسته‌ی جبری با آن اندازه وجود دارد.

---

[2] چنین الگوریتمی می‌تواند تصمیم بگیرد که چه جمله‌ای درباره‌ی اعداد مختلط درست است و چه جمله‌ای غلط است. در این باره بعداً صحبت خواهیم کرد.

تعریف ۶. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ ساختار باشند. می گوییم $\mathfrak{N}$ با $\mathfrak{M}$ ایزومورف است هرگاه تابع یک‌به‌یک و پوشای $F : M \to N$ موجود باشد که ویژگی های زیر را داشته باشد:

۱. برای هر ثابت $c \in \mathcal{L}$ داشته باشیم $F(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$،

۲. برای هر $a_1, \cdots, a_n \in M$ و هر $R \in \mathcal{L}$ داشته باشیم $R^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) \iff R^{\mathfrak{N}}(F(a_1), \cdots, F(a_n))$،

۳. برای هر تابع $f \in \mathcal{L}$ داشته باشیم $f^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) = a_{n+1} \iff f^{\mathfrak{N}}(F(a_1), \cdots, F(a_n)) = F(a_{n+1})$.

لم زیر بیان می‌کند که در دو ساختار ایزومرف، اتفاقهای یکسانی رخ می‌دهد.

لم ۷. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ ساختار ایزومورف باشند. در این صورت اگر $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ یک $\mathcal{L}$ فرمول باشد و $a_1, \cdots, a_n \in M$ آنگاه

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(F(a_1), \cdots, F(a_n))$$

لم بالا را در جلسه‌ی آینده اثبات خواهیم کرد.

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.