۱ جلسه‌ی اول، معرفی منطق ریاضی

در این جلسه قرار است منطق ریاضی را هم به عنوان یکی از گرایشهای رشته‌ی ریاضی، و هم به عنوان یک درس سه واحدی معرفی کنم. منطق ریاضی، یا **مبانی ریاضیات** گرایشی از ریاضیات محض است که خود دارای چهار زیرگرایش اصلی است: نظریه‌ی مدل، نظریه‌ی اثبات، نظریه‌ی بازگشت و نظریه‌ی مجموعه‌ها. در درس منطق ریاضی به هر یک از این گرایشها به فراخورِ وقت پرداخته خواهد شد. گرایشِ تخصصی مدرس، نظریه‌ی مدل است و از این رو، بعید نیست که تکیه‌ی او بر جنبه‌های نظریه‌ی مدلی درس بر بقیه‌ی جنبه‌ها بچربد.

علم منطق همواره به عنوان ابزارِ کار، در کنار علم ریاضی وجود داشته است و جائی از ریاضی خالی از منطق نبوده است، لیکن وقوع رویدادهائی در قرن نوزدهم باعث اهمیت یافتن بیشتر منطق و تبدیل شدن آن به یک گرایش مستقل در ریاضیات شد. در زیر، با ذکر مقدماتی، به برخی از این رویدادها خواهیم پرداخت.

همان طور که می‌دانید برای اثبات یک قضیه در ریاضیات به دو عامل نیازمندیم نخست، قضایائی که قبلاً ثابت شده‌اند (که به عنوان پیش‌فرض از آنها استفاده می‌کنیم) و دوم، آشنائی با روش استدلال کردن (این را نیز می‌دانیم که باید روشهای استدلال کردن بین همه‌ی ریاضی‌دانان پذیرفته‌شده و به صورت یکسان باشند). اما خودِ آن قضایای قبلاً اثبات‌شده از قضایای دیگری، باز هم توسط استدلالهای منطقی نتیجه شده‌اند و آنها نیز به همین ترتیب. پس این سوال پیش می‌آید که **آیا مجموعه‌ای از اصول اولیه وجود دارد که هر قضیه‌ای در ریاضی در نهایت به یکی از آنها برسد، و هر چه که نادرست باشد، نادرستی آن از این اصول نتیجه شود؟** به بیان دیگر، **آیا مجموعه‌ای کامل** [1] **از اصول برای ریاضیات وجود دارد؟**

طبیعی است که سوال بالا، همواره برای ریاضیدانان مطرح بوده باشد. بخشهایی از ریاضیات از گذشته دارای اصلبندی بوده‌اند: برای مثال، هندسه‌ی اقلیدسی دارای چند اصل ساده است که همه‌ی قضایا (در هندسه‌ی اقلیدسی) از آنها نتیجه می‌شوند، و هر چیزی که اشتباه باشد، با استفاده از اصول اقلیدس می‌توان اشتباه بودن آن را ثابت کرد. هیلبرت، ریاضیدان آلمانی که در اکثر گرایشهای ریاضی تبحر داشت، معتقد بود که برای ریاضیات به عنوان یک علم نیز مجموعه‌ای از اصول اولیه وجود دارد.

در قرن ۱۹ میلادی، هیلبرت ۲۳ مسئله‌ی باز در علم ریاضی را در یک سخنرانی معروف مطرح کرد.

پروژه ۱. به عنوان یک پروژه‌ی تحقیقاتی، به دانشجو پیشنهاد می‌کنم که ۲۳ سوال مطرح شده توسط هیلبرت، درگرایشهای مختلف ریاضی را جمع‌آوری کند.

پروژه ۲. اصول اقلیدس چه بودند؟ (در واقع برخی قضایائی که اقلیدس ثابت کرده بود، از اصول وضع شده توسط او نتیجه نمی‌شد و هیلبرت اصول هندسه را **کامل** کرد.)

از میان این مسائل، یکی مورد علاقه‌ی این درس است؛ مسئله‌ی دهم: آیا یک روش الگوریتمیک وجود دارد که تعیین کند که آیا یک چند جمله‌ایِ چندمتغیره با ضرایب در اعداد صحیح، دارای ریشه‌ای در اعداد صحیح است یا خیر؟ سوال بالا منجر به مطرح شدن «مسئله‌ی تصمیم‌گیری»، به آلمانی، $Entscheidungsproblem$ [2] شد، که مربوط به بحث ماست. صورت این مسئله این است: آیا می‌توان مجموعه (ی‌کوچک‌ومناسبی) از اصول برای ریاضیات (به طور خاص برای اعداد طبیعی) نوشت به طوری که هر چه که در ریاضیات درست است، درستی آن از این اصول نتیجه شود و هر چه که نادرست باشد نادرستی آن از این اصول نتیجه شود؟

[1] عبارت «کامل» یک عبارت تخصصی است که در این درس معنی خواهد شد.
[2] بخوانید: اِنْتْشایْدونگز پِغُبلم

ظاهراً در همان گردهمائی، احتمالاً در روز دیگری، گودل قضیه‌ی ناتمامیت خودش را عرضه کرده است، که امکان چنین اصل‌بندی را برای ریاضیات نفی می‌کند. **بنا به این قضیه، (قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل) هر اصل‌بندی (مناسب از نظر منطقی) که برای اعداد طبیعی در نظر بگیریم، ناکامل است؛ یعنی قضیه‌ی درستی درباره‌ی اعداد طبیعی پیدا می‌شود که توسط آنها قابل اثبات نیست.** [۳]

قضیه‌ی ناتمامیت گودل، که در این درس بدان خواهیم پرداخت، یکی از ارکان مهم در شروع گرایش منطق ریاضی بوده است. گفتیم که بنا به این قضیه، اصلبندیِ کامل (یعنی اصلبندی‌ای که درست و غلط بودن همه چیز از آن معلوم شود) برای ریاضیات وجود ندارد؛ با این حال چیزهائی که تا اکنون در ریاضیات ثابت شده‌اند، دارای اصولی اولیه‌اند. مشکل اینجاست که نمی‌دانیم که آیا این اصول به تناقضی منجر می‌شوند یا نه. در زیر پس از مقدمه‌ای کوتاه در این باره بیشتر توضیح داده‌ام.

همزمان با پیشرفت سایر گرایشهای ریاضی، به ویژه آنالیز ریاضی، معلوم شد که مفهوم «مجموعه» نقشی اساسی در ریاضیات بازی می‌کند. اعداد طبیعی مجموعه‌اند (به جزوه‌ی مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید) روابط و توابع مجموعه‌اند، اعداد صحیح با نوعی رابطه‌ی هم‌ارزی ازاعداد طبیعی حاصل می‌شوند، اعداد گویا با یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی اعداد صحیح به دست می‌آیند و اعداد حقیقی، دنباله‌هائی شمارا از اعداد گویا هستند. بنابراین همه‌ی پدیده‌های ریاضی مجموعه‌اند و برای اصلبندی ریاضیات، اصلبندی نظریه‌ی مجموعه‌ها بسیار مهم است.

در نخستین تعریف شهودی مجموعه‌ها، مجموعه عبارت است از گردایه‌ای از اشیاء که دارای ویژگی مشترکی هستند. اگر این ویژگی مشترک را p بنامیم، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x|p(x)\}.$$

در همان قرن ۱۹ مطرح شدن یک تناقض توسط راسل، ابهام بزرگی در ریاضیات ایجاد کرد: فرض کنید $p(x)$ عبارتِ $x \notin x$ باشد. پس عبارت زیر یک مجموعه است:

$$A = \{x|x \notin x\}$$

از آنجا که A مجموعه نیست، از دو حال خارج نیست؛ یا $A \in A$ یا $A \notin A$.

تمرین ۳. نشان دهید که اگر $A \in A$ آنگاه $A \notin A$ و اگر $A \notin A$ آنگاه $A \in A$.

همان طور که در تمرین بالا مشاهده می‌کنید، اگر نظریه‌ی مجموعه‌ها همین باشد که کانتور می‌گوید، پس ریاضیات علمی تناقض آمیز است. این خودْ یکی از نگرانی‌های منطق است: آیا ممکن است ریاضیات ما، که ساخت آن از اصول خاصی پیروی می‌کند، تناقض‌آمیز باشد؟ (سوال تناقض آمیز بودن ریاضیات، با سوال وجود یک اصلبندی کامل برای آن، یا همان قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل، در ارتباط است؛ این ارتباط را در این درس خواهید دید.)

در این درس قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل را ثابت خواهیم کرد و خواهیم دید که روش اثبات، استفاده از یک سوال خودْمرجع، مشابه تناقض راسل است. در واقع اگر مجموعه‌ای از اصول برای ریاضیات بنویسیم و این اصول «از خود بپرسند» که آیا ما با هم سازگاریم (یعنی تناقض نداریم)، این سوال توسط آن اصول قابل پاسخ دادن نیست.

در بحثهای بالا از کلمه‌ی الگوریتم نیز استفاده شد. در واقع، مبانی علم منطق به مبانی علوم رایانه‌ی نظری نیز پیوند می‌خورد. **قضیه‌ی ناتمامیت اول** گودل، که آن را نیز در این درس ثابت خواهیم کرد، می‌گوید که «الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند که آیا یک جمله‌ی داده شده در اعداد طبیعی درست است یا خیر». مسئله‌ی توقف [۴]، در نظریه‌ی محاسبه‌پذیری، می‌گوید که

[۳] پیشنهاد می‌کنم مقاله‌ی «تجاهل بورباکی» را مطالعه بفرمائید. این قضیه، قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل نام دارد. فعلاً نمی‌توانم صورت دقیقتری از آن را بیان کنم.

[۴] Halting problem

الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند که کدام الگوریتم رایانه‌ای می‌ایستد و کدام تا ابد ادامه می‌یابد. در درس منطق به ارتباط این دو با هم خواهیم پرداخت و خواهیم دید که این دو سوال با هم معادلند.

گودل قضیه‌ی مهم دیگری به نام «قضیه‌ی تمامیت» دارد. بنا به این قضیه، هر چه که در «منطق مرتبه‌ی اول» درست باشد، قابل اثبات است [5]. قضایای گودل (به خصوص قضیه‌ی تمامیت) منجر به ایجاد گرایشی در ریاضیات به نام نظریه‌ی مدل شد. در این گرایش ابزارهای منطقی برای مطالعه‌ی جبر و آنالیز و هندسه و سایر گرایشهای دیگر ریاضی استفاده می‌شوند. در بخشی از این درس به نظریه‌ی مدل نیز خواهیم پرداخت. نحوه‌ی چینش درس بدین صورت خواهد بود: نخست به منطق گزاره‌ها، و سپس به منطق مرتبه ی اول خواهیم پرداخت. قضیه‌ی تمامیت گودل را ثابت خواهیم کرد، سپس وارد نظریه‌ی مجموعه‌ها خواهیم شد و قضیه‌ی ناتمامیت اول و دوم را ثابت خواهیم کرد. سپس وارد نظریه‌ی بازگشت و مبانی علوم کامپیوتری درس خواهیم شد و به قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل در حساب خواهیم پرداخت.

درس منطق در سه قضیه‌ی زیر خلاصه می‌شود:

۱. قضیه ناتمامیت دوم گودل: برای هر مجموعه‌ای از اصول مرتبه‌ی اول که برای اعداد طبیعی در نظر بگیریم، حقایق درستی درباره‌ی اعداد طبیعی وجود دارند که از آنها نتیجه نمی‌شوند.

۲. قضیه‌ی ناتمامیت اول گودل: اگر مجموعه‌ی همه‌ی گزاره‌هایی که در اعداد طبیعی درست هستند را در نظر بگیریم، الگوریتمی وجود ندارد که مشخص کند که برای یک گزاره‌ی داده شده، آیا خودِاین گزاره در این مجموعه است یا نقیض آن.

۳. قضیه‌ی تمامیت گودل: آنچه در منطق مرتبه‌ی اول درست است، در این منطق قابل اثبات است و آنچه اثبات شود، درست است.

[5] ممکن است مقایسه‌ی این قضیه با قضیه‌ی ناتمامیت کمی شما را گیج کند. برای دیدن بیان دقیق آن کافی است چند جلسه صبر کنید.