۱ جلسه‌های بیست‌وچهار، بیست‌وپنج و بیست‌وشش

در جلسه‌ی قبل با تعریف یک عدد طبیعی آشنا شدیم. همچنین نشان دادیم که ω، کلاس همه‌ی اعداد طبیعی، قابل تعریف در زبان نظریه‌ی مجموعه‌هاست و از آنجا که زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی استقرائی است، بنا به اصل تصریح یک مجموعه است. گفتیم که در داخل یک عدد طبیعی، رابطه‌ی $\in$ یک ترتیب خطی است. در لم زیر بیان کرده‌ایم که رابطه‌ی تعلق، بین اعداد طبیعی نیز یک ترتیب تعریف می‌کند.

لم ۱. $(\omega, \in)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب است. (یعنی $\in$ روی ω یک ترتیب خطی است و هر زیر مجموعه از ω با این ترتیب، دارای یک عنصر مینی‌موم است).

اثبات. اثباتِ‌ترتیبی بودن رابطه‌ی $\in$ نسبتاً آسان است و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنم. در زیر نخست نشان می‌دهیم که ترتیب مورد نظر خطی است؛ یعنی هر دو عدد طبیعی با این ترتیب با هم قابل مقایسه هستند.

فرض کنید $x, y \in \omega$. ادعا می‌کنیم که یا $x \in y$ یا $y \in x$ یا $x = y$.

ادعا ۱. یا $x \cap y = x$ یا $x \cap y \in x$؛ و مشابهاً یا $x \cap y = y$ یا $x \cap y \in y$.

توجه ۲. دو اتفاقِ $x \cap y \in y$ و $x \cap y \in x$ همزمان نمی‌توانند رخ دهند. زیرا اگر با هم رخ دهند داریم:

$$x \cap y \in x \cap y$$

و این ناقض اصل انتظام است. همچنین اگر حالتِ $x \cap y = x$ و $x \cap y = y$ رخ دهد آنگاه $x \subseteq y$ و $y \subseteq x$ و از این رو $x = y$. اگر $x \cap y = x$ و $x \cap y \in y$ آنگاه $x \in y$ و حکم ثابت می‌شود. مشابهاً اگر $x \cap y = y$ و $x \cap y \in x$ آنگاه $y \in x$. پس تنها کافی است که ادعای بالا ثابت شود.

فرض کنید $x \cap y \neq x$. قرار دهید

$$t = \min(x - x \cap y).$$

مجموعه‌ی t در بالا موجود است، زیرا x یک عدد طبیعی است و هر زیرمجموعه از آن دارای یک مینی‌موم است. ادعا می‌کنیم که $t = x \cap y$.

باید ثابت کنیم که

$$\text{۱}\quad t \subseteq x \cap y$$

$$\text{۲}\quad x \cap y \subseteq t$$

اثبات مورد اول. فرض کنید $u \in t$. از آنجا که $t \in x$ و x متعدی است داریم $u \in x$. باید ثابت کنیم که $u \in y$. اگر $u \notin y$ آنگاه $u \in x - x \cap y$. پس، از آنجا که $t = \min x - x \cap y$ داریم $t \in u$. پس $t \in u \in t$؛ که این بنا به تعدی عناصر موجود در x، اصل انتظام را نقض می‌کند.

اثبات مورد دوم. اگر $u \in x \cap y$ و $u \notin t$ آنگاه $t \in u$ یا $t = u$. پس $t \in x \cap y$ و این متناقضِ $t = \min x - x \cap y$ است. اثباتِ‌خطی بودن ترتیب تعلق روی ω در این جا به پایان می‌رسد. در ادامه ثابت کرده‌ایم که هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از ω با این رابطه $(\in)$ داری کوچکترین عنصر است.

فرض کنید ω ⊇ y، و فرض کنید $x_0 \in y$ (x_0 یک عدد طبیعی است). اگر y مینی‌موم نداشته باشد عنصر $x_1 \in x_0$ موجود است. بنابراین (بنا به اصل انتخاب و بنا به قضیه‌ی بازگشت که در ادامه آمده است) دنباله‌ی

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$$

قابل تعریف است. توجه کنید که می‌توان در زدافسی ثابت کرد که $\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq x_0$؛ و این مخالف خوش‌بنیادی x_0 است.(به بیان دقیق‌تر، مخالف اصل انتظام است.) $\square$

توجه کنید که ω خودش عدد طبیعی نیست؛ زیرا در غیر این صورت داریم $\omega \in \omega$ و این اصل انتظام را نقض می‌کند.

قضیه‌ی زیر، موسوم به قضیه‌ی بازگشت [1] است.

قضیه ۳ (بازگشت)**.** فرض کنید

$$g : A \to B$$

و

$$h : A \times \omega \times B \to B$$

دو تابع باشند. آنگاه یک تابع

$$f : A \times \omega \to B$$

موجود است به طوری که برای هر $a \in A$ نگاشتِ f به صورت زیر عمل می‌کند:

$$(a, 0) \mapsto g(a)$$

$$\big(a, \underset{n+1}{S(n)}\big) \mapsto h\big(a, n, f(a, n)\big)$$

اثبات. برای هر $a \in A$ و هر $n \in \omega$ ($\{x \in \omega | x < n\}$) یک **تابع یکتا** به صورت

$$f_a : \{a\} \times n \mapsto B$$

موجود است که ویژگی‌های یاد شده را داراست.(با استقراء ثابت کنید.) [2] حال تابع

$$f_{A_n} : A \times n = \bigcup f_a$$

را در نظر بگیرید. قرار دهید [3]

$$f = \bigcup f_{A_n}.$$

$\square$

[1] recursion

[2] دقت کنید که همه‌چیز در این جا قابل بیان در زبان مرتبه‌ی اول است.

[3] مشابه این قضیه را در درسهای آینده برای اردینالها ثابت خواهم کرد. علت این که این اثبات را خلاصه‌تر گفته‌ام نیز همین است.

بسیاری تعاریف استقرائی روی ω با مجوزِ قضیه‌ی بازگشت رخ می‌دهند. برای مثال، توابع جمع و ضرب روی ω به صورت بازگشتی زیر (با استفاده از تابعِ تالی)تعریف می‌شوند.

$$+ : \omega \times \omega \to \omega$$
$$m + ۰ = m$$
$$m + s(n) = s(m+n)$$

$$\cdot : \omega \times \omega \to \omega$$
$$m \cdot ۰ = ۰$$
$$m \cdot S(n) = m \cdot n + m$$

دقت کنید که برای تعریفِ ضرب، قضیه‌ی بازگشت را با تابع جمع و تابع تالی به کار برده‌ایم.

تا اینجا با مفهوم عدد طبیعی و وجود مجموعه‌ی اعداد طبیعی آشنا شدیم. گفتیم که اعداد طبیعی ما، تنها مجموعه‌ی $\{۰, ۱, \dots\}$ را شامل نمی‌شود و در برخی مدلهای زداف‌اسی اشیای دیگری نیز وجود دارند که اعداد طبیعی هستند (و گفتیم که به آنها اعداد طبیعی نااستاندارد گفته می‌شود). [۴] دقت کنید که در تعریف اعداد طبیعی، رابطه‌ی تعلق نقشی اساسی بازی می‌کند. ترتیب روی اعداد طبیعی همان رابطه‌ی تعلق است و مجموعه‌ی اعداد طبیعی، با این ترتیب، خوش‌ترتیب است. در ادامه‌ی خواهیم دید، که در زداف‌سی اعداد ترتیبی دیگری نیز وجود دارند که به آنها «اُردینال» گفته می‌شود. خواهیم دید که نه تنها هر عدد طبیعی یک اردینال است، بلکه مجموعه‌ی اعداد طبیعی نیز، که خود با رابطه‌ی ترتیب مرتب می‌شود، یک اردینال است.

۲ اُردینالها

تعریف ۴. مجموعه‌ی x را یک اردینال (یا یک عدد ترتیبی) [۵] می‌نامیم هرگاه

۱. $(x, \in)$ متعدی باشد؛ یعنی

$$z \in y \in x \to z \in x$$

یا به بیان دیگر

$$\bigcup x \subseteq x.$$

۲. $(x, \in)$ یک مجموعه‌ی مرتب خطی باشد؛ یعنی

$$\forall y \in x \quad \neg(y \in y)$$
$$\forall t_۱, t_۲, t_۳ \in x \quad (t_۱ \in t_۲ \in t_۳ \to t_۱ \in t_۳)$$
$$\forall t_۱, t_۲ \in x \quad t_۱ \in t_۲ \vee t_۲ \in t_۱ \vee t_۱ = t_۲$$

[۴] به همین دلیل ما از نمادِ $\mathbb{N}$ برای اعداد طبیعی استفاده نکرده‌ایم.

[۵] ordinal

تمرین ۱. نشان دهید که

۱. هر عدد طبیعی یک اردینال است.

۲. ω یک اردینال است.

۳. هر اردینال دارای یک عنصر ابتدا (یعنی یک مینی‌موم) است.

۴. اگر رابطه‌ی تعلق را روی تمام اردینالها در نظر بگیریم، آنها هر زیرکلاس از اردینالها دارای عنصر ابتدا است. (در زیر این اثبات شده است).

از این به بعد، کلاس همه‌ی اردینالها را با On نشان می‌دهیم. دقت کنید که وقتی از کلمه‌ی کلاس استفاده می‌کنیم، یعنی سیستم مورد نظر قابل تعریف در زداف‌سی است. در اینجا اردینال بودن، یک ویژگی قابل بیان در زداف‌اسی است، پس on یک کلاس است. در ادامه نشان خواهیم داد که هر دو اردینال، با یکدیگر قابل مقایسه (با رابطه‌ی تعلق) هستند. نخست نشان می‌دهیم که هر زیر کلاس از اردینالها دارای یک عنصر ابتدا (با رابطه‌ی تعلق) است.

لم ۵. هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از یک اردینال α دارای مینی‌موم است.

فرض کنید $H \subseteq \alpha$ و $x_0 \in H$. اگر x_0 دارای مینی‌موم نباشد آنگاه $\exists x_1 \in x_0$، و به این ترتیب بنا به اصل انتخاب و قضیه‌ی بازگشت، دنباله‌ی

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$$

ساخته می‌شود. پس $\{x_1, x_2, \dots\}$ یک مجموعه است و این اصل انتظام را نقض می‌کند.

تعریف ۶. فرض کنید α یک اردینال باشد و $U \subseteq \alpha$. می‌گوییم U یک قطعه‌ی ابتدائیِ α است هرگاه برای هر $t \in U$

$$\{x \in U | x \in t\} = \{x \in \alpha | x \in t\}.$$

لم ۷. اگر U یک بخش ابتدائی از α باشد آنگاه یا $U \in \alpha$ یا $U = \alpha$.

اثبات. فرض کنید $U \neq \alpha$. فرض کنید

$$t = \min(\alpha - U).$$

ادعا می‌کنیم که $U = t$.
باید ثابت کنیم که

$$\begin{cases} ① \quad U \subseteq t \\ ② \quad t \subseteq U \end{cases}$$

اثبات اولی.

$$x \in U \Rightarrow \Big(x \notin t \xrightarrow{(t,x \in \overset{\text{متعدی}}{\alpha} \quad \text{زیرا})} t \in x \vee t = x\Big)$$

از آنجا که U یک بخش ابتدائی از α است، داریم:

$$t \in U$$

پس $t \in t$ که این تناقض است.

اثبات دومی.

$$x \in t \to (x \notin U \to x \in t - U)$$

پس $t \in x$ (زیرا t مینی‌موم مجموعه‌ی سمت راست است)؛ تناقض با این که $x \in t$ یا $t = x$. $\square$

مشابه روشی که برای اعداد طبیعی به کار بردیم، در زیر ثابت می‌کنیم که هر دو اردینال با هم قابل مقایسه هستند.

لم ۸. برای هر $x, y \in On$ یا $x \in y$ یا $y \in x$ یا $x = y$.

اثبات. اولاً (تحقیق کنید که) $x \cap y$ یک بخش ابتدائی از x (و از y) است. بنابراین $x \cap y = x$ یا $x \cap y \in x$ (برای y هم به همین ترتیب). مشابه بحثی که در لم ۱ داشتیم، از این گفته، حکم قضیه را نتیجه بگیرید. $\square$

پس تا اینجا دیدیم (و اگر ندیدیم ثابت کنید) که $(On, \in)$ دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. $\in$ روی On یک ترتیب خطی است.

۲. هر زیر کلاسِ ناتهی $U \subseteq On$ دارای یک عنصر مینی‌موم است.

لم ۹. اگر α یک اردینال باشد آنگاه

$$\alpha = \{\beta \in On | \beta \in \alpha\}$$

اثبات. مجموعه‌ی دست راست را با A نشان دهید. بدیهی است که $A \subseteq \alpha$. حال دقت (و در صورت نیاز ثابت) کنید که اگر $\beta \in \alpha$ آنگاه $\beta \in On$. $\square$

لم ۱۰. On مجموعه نیست.

اثبات. $(on, \in)$ تمام ویژگی‌های یک اردینال را دارد. پس اگر On یک مجموعه باشد آنگاه On اردینال است؛ یعنی $On \in On$ و این با اصل انتظام مغایرت دارد. $\square$

مثال ۱۱. ۱. هر $\underline{n}$ یک اردینال است.

۲. ω یک اردینال است. (تحقیق کنید).

$$۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, \omega, \ldots$$

۳. اگر α اردینال باشد، آنگاه $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ نیز یک اردینال است. دقت کنید که

$$\alpha = \max s(\alpha).$$

از لمِ ۹ یک مفهوم استقراء به صورت زیر برای اردینالها نتیجه می‌شود.

لم ۱۲ (استقراءِ فرامتناهی). اگر $U \subseteq On$ و برای هر اردینال α داشته باشیم

$$\alpha \subseteq U \to \alpha \in U$$

آنگاه

$$U = On.$$

اثبات. اگر شرطهای لم برقرار باشند و $U \neq On$، آنگاه $On - U$ دارای مینی‌موم است. فرض کنید

$$t = \min On - U$$

پس هر اردینال $\alpha \in t$ متعلق به U است. پس $t \subseteq U$. از این رو $t \in U$؛ و این تناقض است. $\square$

تعریف ۱۳. اردینال α را تالی [۶] می‌نامیم هرگاه

$$\exists \beta \in On \quad \alpha = \beta \cup \{\beta\}$$

در این صورت معمولاً می‌نویسیم

$$\alpha = \beta + ۱.$$

همچنین اردینالِ α را حدّی [۷] می‌نامیم هرگاه تالی نباشد.

تمرین ۲. اگر α حدی باشد آنگاه

$$\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

استقراء فرامتناهی [۸] را می‌توان به صورت زیر نیز فرمولبندی کرد:

فرض کنید $U \subseteq On$ دارای ویژگی‌های زیر باشد.

۱. $\emptyset \in U$

۲. برای هر اردینال $\alpha \in U$،

$$\alpha + ۱ \in U$$

۳. اگر β یک اردینال حدی باشد و برای هر $\gamma \in \beta$ داشته باشیم $\gamma \in U$ آنگاه $\beta \in U$.

آنگاه $U = On$.

اثبات. اثبات کنید که اگر این شرطها برقرار باشند، آنگاه برای هر اردینال α از $\alpha \subseteq U$ نتیجه می‌شود که $\alpha \in U$. $\square$

گفتیم که اردینالها، یا حدی هستند و یا تالی و هر اردینالِ تالی، اجتماع اردینالهای قبل از خود است. پس اردینالها به صورت زیر با محاسبه‌ی تالی‌ها و حد گرفتن حاصل می‌شوند:

$$۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, \omega, \omega + ۱, \omega + ۲, \ldots, \underbrace{\omega + \omega}_{\omega \times ۲}, \omega + \omega + ۱, \ldots, \underbrace{\omega + \omega + \omega}_{\omega \times ۳}, \ldots, \underbrace{\omega \times \omega}_{\omega^۲}, \ldots, \omega^۳, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

دقت کنید که ω کوچکترین اردینالِ غیر تالی است و داریم $\omega = \bigcup_{n \in \omega} n$. اردینال حدیِ پس از ω اردینالِ $\omega + \omega = \bigcup_{n \in \omega} \omega + n$ است. به همین ترتیب، $\omega^\omega = \bigcup_{n \in \omega} \omega^n$.

در ادامه می‌خواهیم نشان دهیم که هر مجموعه‌ای در تناظر یک به یک با یک اردینال است. اگر مجموعه‌ی مورد نظر، خوش‌ترتیب باشد، با ترتیب روی خودش، با یک اردینال در تناظر یک به یک است:

[۶] successor
[۷] limit ordinal
[۸] transfinite induction

تعریف ۱۴. مجموعه‌ی $(x,<)$ را خوش ترتیب می‌نامیم هرگاه $<$ روی x یک ترتیب خطی باشد و هر زیر مجموعه از x با این ترتیب دارای یک مینی‌موم باشد.

لم ۱۵. هر مجموعه‌ی خوش ترتیبِ $(x,<)$ ایزومرف با یک اردینالِ $(\alpha,\in)$ است؛ یعنی یک اردینالِ α و یک تابعِ یک به یک و پوشای

$$f:\alpha\to x$$

موجودند به طوری که

$$\beta_1\in\beta_2\leftrightarrow f(\beta_1)<f(\beta_2).$$

پیش از اثبات قضیه، یادآوری می‌کنم که منظور از یک تابعال، کلاسی (قابل تعریف) است که دارای ویژگی تابع بودن است. یک تابعال، چیزی شبیه به یک تابع است که اولاً توسط یک فرمول تعریف می‌شود و ثانیاً دامنه و برد آن لزوماً مجموعه نیستند.

توجه ۱۶. در اثبات قضیه‌ی زیر و چند قضیه‌ی دیگر در جلسات آینده، از **قضیه‌ی بازگشت روی اردینالها** استفاده شده است. **در واقع این قضیه، تعریف‌پذیریِ تابعالهای به کار رفته در این اثباتها، و حق استفاده از لم جانشانی را، در پایان هر اثبات تضمین می‌کند.** با این حال، با یک ملاحظه‌ی آموزشی، خودِ قضیه‌ی بازگشت، را پس از تمام این قضیه‌ها بیان خواهم کرد.

نمادگذاری ۱۷.

$$f[c]=\{f(b)|b\in c\}.$$

اثبات. فرض کنید $(x,<)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد. فرض کنید $\star\notin x$. تابعال زیر را در نظر بگیرید.

$$f:On\to x\cup\{\star\}$$

$$f(\alpha)=\begin{cases}\min_< \quad x-f[\alpha] & \text{اگر } f[\alpha]\text{، }x \text{ را نپوشانده باشد}\\ \star & \text{در غیر این صورت}\end{cases}.$$

ادعا ۲. $\star$ حتماً توسط f پوشانده می‌شود. (پس یک اردینال α موجود است به طوری که $f[\alpha]$ تمام x را می‌پوشاند).

در غیر این صورت تابعال f برای هر اردینالِ α روی تمامِ $\beta\in\alpha$ تعریف می‌شود. پس تابعالِ f روی تمام اردینالها تعریف می‌شود. از طرفی α یک مجموعه است و f یک به یک است:

$$f^{-1}:\quad \overset{\overset{\text{یک زیر مجموعه‌ای از } x}{\uparrow}}{f[On]}\quad\to On$$

تصویر f^{-1} بنا به لم جانشانی یک مجموعه می‌شود اما f^{-1} همان On است.

قرار دهید

$$\alpha=\min\{\beta\in On|f(\beta)=\star\}$$

ثابت کنید که $(\alpha,\in)\cong(x,<)$. □

در بالا ثابت کردیم که هر مجموعه‌ی خوش‌ترتیب، با یک اردینال ایزومرف است و این نگاشت ایزومرفیسم، ترتیب را نیز حفظ می‌کند. در ادامه می‌خواهیم ثابت کنید که روی هر مجموعه‌ی دلخواه، می‌توان یک ترتیب تعریف کرد که با آن ترتیب،مجموعه‌ی مورد نظر ما خوش‌ترتیب شود. این گفته به اصل خوش‌ترتیبی معروف است که در واقع، نتیجه‌ای از اصل انتخاب (و سایر اصول زدافسی) است. در زیر هر دوی این اصول را بیان کرده‌ام:

- اصل انتخاب:

$$\forall x(\forall y \in x \quad y \neq \emptyset \to \exists f : x \to \cup x \quad \forall t \in x \quad f(t) \in t)$$

- اصل خوش‌ترتیبی: روی هر مجموعه‌ی دلخواه x می‌توان یک ترتیب $>$ تعریف کرد به طوری که $(x, <)$ خوش‌ترتیب باشد.

در ادامه خواهیم دید که اصل خوش‌ترتیبی، یک قضیه در زداف‌سی است. علت آنکه به آن **اصل** خوش‌ترتیبی گفته می‌شود، این است که می‌توان به جای اصل انتخاب، اصل خوش‌ترتیبی را در زداف‌سی در نظر گرفت و در آن صورت، انتخاب یک قضیه است. در زیر این گفته را ثابت خواهیم کرد.

اثبات این که اصل انتخاب از اصل خوش‌ترتیبی نتیجه می‌شود، ساده است. فرض کنید x یک مجموعه باشد. بنا به اصل خوش‌ترتیبی، روی x یک ترتیب داریم که با آن هر زیرمجموعه‌اش دارای عنصر ابتدا است. تابع $f : x \to \cup x$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(y) = \min \quad y.$$

تابع بالا یک تابع انتخاب است. در زیر عکس این گفته را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۱۸. اصل خوش‌ترتیبی از اصل انتخاب نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید x یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. تابعال f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f : On \to x \cup \{*\}$$

$$\alpha \mapsto \begin{cases} x - f[\alpha] \text{یک عضو انتخاب شده از} & x - f[\alpha] \neq \varnothing \\ * & x = f[\alpha] \end{cases}$$

به بیان بهتر، فرض کنید g یک تابع انتخاب روی $P(x) - \varnothing$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(\alpha) = \begin{cases} g(x - f[\alpha]) & x - f[\alpha] \neq \varnothing \\ * & x = f[\alpha] \end{cases}$$

تابع f متوقف می‌شود. یعنی $\alpha \in On$ موجود است به طوری که $f(\alpha) = *$. زیرا در غیر این صورت f^{-1}(تصویرf) یک مجموعه می‌شود و f^{-1}(تصویرf) $= On$ (طبق اصل جانشانی).

بنابراین $\exists \alpha \in On \quad f(\alpha) = *$. فرض کنید α کوچک‌ترین اردینالی باشد که $f(\alpha) = *$. بررسی کنید که تابع $f : \alpha \to x$ $\underbrace{\text{یک به یک}}_{\text{تمرین}}$ و پوشاست. حال ترتیب α را روی x انتقال می‌دهیم؛ یعنی تعریف می‌کنیم:

$$\forall y, z \in x \quad y < z \Leftrightarrow \alpha_1 \in \alpha_2 \quad (f(\alpha_1) = y, f(\alpha_2) = z)$$

$\square$

در بالا ثابت کردیم که اصل انتخاب را در زدافسی می‌توان با اصل خوش‌ترتیبی جایگزین کرد. در زیر نشان خواهیم داد که لم زُرن [۹] را نیز می‌توان به جای اصل انتخاب در زدافسی در نظر گرفت. در اثبات لم زرن، از این ایده استفاده کرده‌ایم که در یک مجموعه،نمی‌توان زنجیری به طول کلاس تمام اردینالها داشت.

یادآوری می‌کنم که به ترتیبی که خطی نباشد (یعنی وقتی لزوماً همه‌ی عناصر با هم قابل مقایسه نباشند) یک ترتیب جزئی گفته می‌شود. اگر $(A,<)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، به هر زیرمجموعه از آن که با ترتیبِ $<$ مرتب خطی باشد، یک زنجیر گفته می‌شود.

قضیه ۱۹ (لم زُرن)**.** فرض کنید $(A,<)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ناتهی باشد و فرض کنید که هر زنجیر $(B,<)$ در A دارای یک کران بالا در A باشد؛ یعنی

$$\exists \alpha \in A \quad \forall x \in B \quad \alpha \geq x.$$

آنگاه A دارای یک عنصر ماکزیمال است؛ یعنی عنصر $b \in A$ موجود است به طوری که $\forall a \in A \neg(a > b)$. [۱۰]

اثبات. یک تابع انتخاب، مثلاً به نام g، وجود دارد که از میان کران‌های بالای هر زنجیر یک عنصر انتخاب می‌کند. تابعالِ $f : On \to A$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(\alpha) = \begin{cases} g(f[\alpha]) & g(\alpha) \notin f[\alpha] \\ * & g(\alpha) \in f[\alpha]. \end{cases}$$

فرض کنید α کوچک‌ترین اردینالی باشد که $f(\alpha) = *$. در این صورت، کران بالای $f[\alpha]$ در واقع ماکزیمم $f[\alpha]$ است. این کران بالا یک عنصر ماکزیمال در A است. $\square$

تمرین ۳. نشان دهید که اصل انتخاب از لم زرن نتیجه می‌شود. (راهنمایی: بین توابع انتخاب جزئی، ترتیب شمول را تعریف کنید و بدین ترتیب یک تابع ماکزیمال پیدا کنید که قرار است تابع انتخاب مورد نظر شما باشد.) [۱۱]

[۹] Zorn's lemma

[۱۰] درباره‌ی فرق یک عنصر ماکزیمال با یک عنصر ماکزیمم، مفصلاً در کلاس صحبت کردیم.

[۱۱] در صورت نیاز، به اثبات این گفته در جزوه‌ی مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید.