۱ جلسات بیستم، بیست ویکم و بیست‌ودوم، اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

هدفمان در ادامه‌ی درس، ارائه‌ی یک اصل‌بندی (به بیان دیگر، ارائه‌ی یک تئوری) برای نظریه‌ی مجموعه‌هاست.[۱] یادآوری می‌کنم که در مورد یک تئوری T دانستن سه چیز مهم است:

۱. آیا این تئوری متناهیا سازگار است؟ (یعنی تناقض نمی‌دهد).

$$(T \nvdash \varphi \wedge \neg\varphi)$$

۲. مدل های این تئوری به چه شکل هستند.

$$\mathfrak{M} \models T.$$

۳. آیا این تئوری کامل است؟ (یعنی اگر ϕ یک جمله‌ی مرتبه‌ی اول باشد، یا خودش و یا نقیض در تئوری ثابت شود).

همه‌ی این سوالات را باید درباره‌ی اصولی که برای نظریه‌ی مجموعه‌ها ارائه خواهیم کرد، هم پرسید.

در جلسه‌ی قبل، درباره‌ی نظریه‌ی کانتور برای مجموعه‌ها صحبت کردیم. این نظریه، دارای دو اصل است:

اصل ۱ (گسترش)**.**

$$\forall x, y \ \ \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y \rightarrow x = y)$$

اصل ۲ (اصل شمول)**.** فرض کنید $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ یک فرمول مرتبه اول در زبانِ $L = \{\in\}$ باشد. برای هر $y_1, \ldots, y_n$ سیستمِ

$$z = \{x | \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\}$$

یک مجموعه است. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\forall y_1, \ldots, y_n \exists z \forall t \quad \big(t \in z \leftrightarrow \phi(t, y_1, \ldots, y_n)\big)$$

دو اصل بالا، اصول نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور (یا اصول ساده‌انگارانه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها) نامیده می‌شوند.

لم ۱. نظریه مجموعه های کانتور ناسازگار است. (یعنی نظریه مجموعه‌های کانتور تناقض آمیز هستند.)

اثبات. فرمول $\varphi(x) : x \notin x$ فرمولی در زبان نظریه مجموعه هاست. پس بنا به اصل شمول، عبارت زیر از اصول نظریه‌ی مجموعه‌های ساده‌انگارانه نتیجه می‌شود:

$$\exists z \ \ \forall t \ \ t \in z \leftrightarrow t \notin t$$

به بیان دیگر $z = \{x | x \notin x\}$ یک مجموعه است. از فرمول بالا، فرمول زیر نتیجه می‌شود:

$$\exists z \quad z \in z \leftrightarrow z \notin z.$$

فرمول بالا، تناقض آمیز است. □

[۱] علت تأخیر در بارگذاری این جلسات، مشغولیتم به اسباب‌کشی و از آن مهم تر، بی‌انگیزگیم به علت ناامیدی از دانشجویان بود. سرِ کلاس درسی که برای لحظه‌لحظه‌ی آن وقت می‌گذارم و کلاسی که در آن دارد مبانی ریاضیات به دقیق‌ترین وجه آن تدریس می‌شود، و کلاسی که همسطح کلاسهای بهترین دانشگاههای دنیاست، دانشجویان علاقه‌مندم غایب و اکثر حاضرین، به طور گروهی مشغول مطالعه و حتی بحث درباره‌ی درسی دیگر بودند که امتحانش را داشتند. نمی‌دانم این صحنه را چگونه از ذهن پاک کنم. با این حال، آقایان نیک‌آبادی و محمدصالحی، و خانم پیری زحمت تایپ این جلسات را کشیدند و من نیز در پاسخ، مجاب به بازخوانی و تصحیح آنها شدم.

توجه کنید که اگر قضیه‌ی تمامیت (مدل داشتن هر تئوری سازگار) را در نظر بگیریم، اثبات بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت: اگر اصول ساده‌انگارانه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها با هم سازگار باشند، آنگاه مدلی مانند M برای آنها وجود دارد. اعضای این مدل، مجموعه نامیده می‌شوند. پس

$$M \models \exists t \ \forall z \ \ z \in t \leftrightarrow z \notin z$$

پس مجموعه‌ی a در M موجود است به طوری که

$$M \models \forall z \quad z \in a \leftrightarrow z \notin z.$$

بنابراین

$$M \models a \in a \leftrightarrow a \notin a.$$

که این امکان‌پذیر نیست.

آنچه در بالا به عنوان اثبات ناسازگاری نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور ارائه شد، در واقع **پارادوکس راسل** نام دارد. وقوع این پارادوکس و پاردوکسهای مشابه، منجر به تلاشهای زیادی برای ارائه‌ی یک اصل‌بندی عاری از تناقضات برای ریاضیات شد. ازمیان این تلاشها، اصول زِرملو و فرانکل به همراه اصل انتخاب [۲]، مورد اقبال عمومی بهتری قرار گرفت. در ادامه‌ی درس به بیان این اصول خواهیم پرداخت. نیز سه نکته‌ای را که درباره‌ی یک تئوری در ابتدای این جلسه گفتیم، باید درباره‌ی این اصول نیز بررسی کنیم. دقت کنید که اگر اصول زرملو و فرانکل به علاوه به اصل انتخاب (که به آنها از این به بعد ZFC خواهیم گفت) برای نظریه‌ی مجموعه‌ها، سازگار باشند، آنگاه نظریه‌ی مجموعه‌ها (بنا به تمامیت) دارای یک مدل است. به هر یک از اشیای موجود در این مدل، یک مجموعه گفته می‌شود. بنابراین، تنها به چیزهایی مجموعه می‌گوییم که وجودشان (یعنی مجموعه بودنشان) از اصول ZFC نتیجه شود. پس مثلاً a یک مجموعه است هرگاه

$$ZFC \vdash \exists x \quad x = a$$

به بیان دیگر، a در صورتی مجموعه است که با استفاده از اصول هیلبرت در ZFC بتوان ثابت کرد که یک شیء وجود دارد که همان a است. در ادامه، به بیان اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها پرداخته‌ایم.

اصل ۱ (اصل گسترش).

$$\forall x, y \ \ ((\forall z \quad z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

اصل ۲ (اصل تصریح). این اصل در واقع با ایجاد یک محدودیت روی اصل شمول کانتور به دست می‌آید. در آنجا می‌گفتیم که سیستم متشکل از اشیائی که یک ویژگی مشترک دارند، مجموعه است. در اینجا آن سیستم برای ما خیلی بزرگتر از آن است که مجموعه باشد، پس آن را به چیزی که می‌دانیم یک مجموعه است تحدید می‌کنیم. به بیان دقیقتر، اگر بدانیم که $y_0, \ldots, y_n$ مجموعه هستند و φ یک فرمول در زبان نظریه مجموعه ها باشد آنگاه عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{z \in y_0 | \varphi(z, y_1, \ldots, y_n)\}$$

به بیان دقیق تر عبارت زیر یکی از اصولِ (در واقع یک شِمای اصل) در ZFC است:

$$\forall y_0, y_1, \ldots, y_n \exists t \forall z \quad z \in t \leftrightarrow z \in y_0 \wedge \varphi(z, y_2, \ldots, y_n)$$

[۲] Zermelo, Fränkel, axiom of choice

منظور از این که عبارت بالا یک شمای اصل است این است که برای هر یک فرمولِ φ باید یک اصل به صورت بالا در ZFC در نظر گرفته شود.

نیز دقت کنید که سور $\forall y_\circ \dots y_n$ در واقع برای پارامترها آمده است. به بیان نظریه‌ی مدلی، اگر M یک جهان برای مجموعه باشد، و $a_\circ, \dots a_n$ اشیایی (مجموعه‌هایی) در این جهان باشند، آنگاه شیئی در این جهان وجود دارد که دقیقا با عبارت زیر توصیف می‌شود:

$$\{x \in a_\circ | \phi(x, a_1, \dots, a_n\}.$$

مثال ۲. اگر x, y دو مجموعه باشند آنگاه $x \cap y$ یک مجموعه است. منظور از $x \cap y$ سیسمتی است که اشیای آن، هم متعلق به x و هم متعلق به y هستند.

$$x \cap y = \{z \in x | z \in y\}$$

اثبات. بنابر اصل تصریح

$$ZFC \vdash \forall x, y \exists t \forall z \quad z \in t \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y$$

دقت کنید که در این اثبات نشان داده‌ایم که اگر دو چیز مجموعه باشند (سور عمومی) چیز دیگری وجود دارد (پس آن هم مجموعه است) که اشتراک آندوست. □

مثال ۳. اگر x, y دو مجموعه باشند آنگاه $x - y$ یک مجموعه است.

$$x - y = \{z \in x | z \notin y\}$$

(اثبات به عهده‌ی شما) [۳]

مثال ۴. تهی یک مجموعه است. با فرض این که x یک مجموعه است، بنا به اصل تصریح،

$$\{z \in x | z \neq z\}$$

یک مجموعه است که به آن مجموعه‌ی تهی خواهیم گفت:

$$ZFC \vdash \exists t \forall z \quad z \in t \leftrightarrow z \in x \wedge z \neq z$$

برخی وجود مجموعه‌ی تهی را یک اصل می‌گیرند. اما در صورتی که ZFC سازگار باشد، حتماً یک مجموعه وجود دارد و بنا به مثال بالا و اصل تصریح، وجود مجموعه‌ی تهی نیز ثابت می‌شود.

قضیه ۵. از اصول ZFC نتیجه می شود که مجموعه همه مجموعه ها وجود ندارد. (به بیان دیگر، سیستم یا کلاس متشکل از همه مجموعه ها، مجموعه نیست.)

نخست دقت (و ثابت) کنید که اگر T یک تئوری باشد و $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$ آنگاه

$$T \vdash \neg\varphi.$$

[۳] برای برخی سوال پیش آمد که y^c یعنی متمم مجموعه‌ی y چیست. برای یافتن پاسخ این سوال به جزوه‌ی مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید.

اثبات. بنا به نکته‌ی بالا، نشان می‌دهیم که اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها با فرض وجود یک مجموعه‌ی شامل همه‌ی مجموعه‌ها ناسازگار است. پس فرض کنید $ZFC \cup \{\exists V \quad \forall x \quad x \in V\}$ سازگار باشد. آنگاه بنا به اصل تصریح

$$ZFC \vdash \exists t \forall z \quad (z \in t \leftrightarrow z \in V \wedge z \notin z)$$

به بیان غیر رسمی تر، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$t = \{z \in V | z \notin z\}$$

اما در این صورت خواهیم داشت:

$$t \in t \leftrightarrow \neg(t \in t).$$

پس این که سیستم متشکل از تمام مجموعه ها، مجموعه باشد، به همراه اصول ZFC تناقض آمیز است. پس نقیض این گفته از اصول ZFC نتیجه می‌شود. $\square$

دقت کنید که V، یعنی کلاس همه‌ی مجموعه‌ها توسط یک فرمولْ قابل وصف است:

$$V = \{x | \forall y \quad y \in x\}$$

با این حال همان طور که ثابت کردیم V یک مجموعه نیست. نامی که برای چنین پدیده‌هایی انتخاب کرده‌ایم، **کلاس** است. در واقع هر عبارتی که در اصل شمول (در نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور) توصیف شود، یک کلاس نام دارد. **اصل تصریح بیانگر این است که اشتراک یک کلاس با یک مجموعه، یک مجموعه است.**

اصل ۳ (اصل جفت سازی). بنا به این اصل، اگر x, y دو مجموعه باشند آنگاه $\{x, y\}$ یک مجموعه است؛ یعنی مجموعه‌ای موجود است که تنها از x, y تشکیل شده است. در زیر بیان دقیق این اصل را نوشته‌ایم:

$$\forall x, y \exists t \forall z \quad (z \in t \leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

مجموعه‌ی t که وجودش در اصل بالا نوشته شده است، به صورت زیر است:

$$t = \{x, y\}.$$

از اصل جفت سازی (و با استقراء) نتیجه می شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$ اگر $y_۱, \ldots, y_n$ مجموعه باشد آنگاه $\{y_۱, \ldots, y_n\}$ مجموعه است.

تعریف ۶. فرض کنید x و y دو مجموعه باشند. زوج مرتب (x, y) به صورت زیر تعریف می‌شود: [۴]

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

لم ۷. اگر x و y مجموعه باشند، آنگاه (x, y) مجموعه است.

اثبات. اگر x و y مجموعه باشند، آنگاه بنا به اصل جفت‌سازی $\{x, x\}$ و $\{x, y\}$ مجموعه هستند. بنا به اصل گسترش $\{x, x\} = \{x\}$ پس $\{x\}$ و $\{x, y\}$ مجموعه هستند. بنا به اصل جفت‌سازی $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ نیز مجموعه است. $\square$

[۴] زوج کوراتُفسکی

اثبات لم زیر را به عهده‌ی شما می‌گذارم.

لم ۸.

$$ZFC \vdash (x,y)=(x',y') \leftrightarrow x=y \wedge x'=y'$$

اصل ۴ (اصل اجتماع)**.** بنا به این اصل، اگر x یک مجموعه باشد آنگاه $\bigcup x$ یک مجموعه است. اصل اجتماع دقیقاً به صورت زیر است:

$$\forall x \exists z \forall y \quad (y \in z \leftrightarrow \exists t (t \in x \wedge y \in t))$$

در واقع مجموعه‌ی z در بالا، همان مجموعه‌ی $\bigcup x$ است.

مثال ۹.

$$x=\{\{۱,۲\},\{۳,۴\}\}$$

$$\bigcup x=\{۱,۲,۳,۴\}$$

لم ۱۰. اگر x و y مجموعه باشند، آنگاه $x \cup y$ مجموعه است.

اثبات. بنا به اصل جفت‌سازی اگر x و y مجموعه باشند آنگاه $\{x,y\}$ مجموعه است. داریم (تحقیق کنید) $x \cup y=\bigcup\{x,y\}$. □

اصل ۵ (اصل توان)**.** اگر x مجموعه باشد آنگاه کلاس متشکل از تمام زیرمجموعه‌های x مجموعه است؛ یا مجموعه‌ای وجود دارد که هر عضو آن دقیقاً یک زیرمجموعه از x است. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\forall x \exists y \forall z \quad (z \in y \leftrightarrow \underbrace{\forall u (u \in z \to u \in x)}_{z \subseteq x})$$

اگر x مجموعه باشد، آنگاه مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های آن را با $\mathcal{P}(x)$ نشان می‌دهیم. **دقت کنید که در نظریه‌ی مجموعه‌ها، هر عضوِ یک مجموعه، مجموعه است (این را با اصل تصریح ثابت کنید!). بنابراین اگر x یک مجموعه باشد، هر عنصرِ متعلق به $\mathcal{P}(x)$ یک مجموعه است. پس هر زیرمجموعه از یک مجموعه، مجموعه است.**

تعریف ۱۱. اگر a و b مجموعه باشند آنگاه $a \times b=\{(x,y) | x \in a \wedge y \in b\}$ نیز مجموعه است. مجموعه‌ی $a \times b$ را حاصلضرب a,b می‌نامیم.

دقت کنید که

$$a \times b=\{\{\{x\},\{x,y\}\} | x \in a \wedge y \in b\}$$

یعنی

$$t \in a \times b \leftrightarrow \exists x \in a \exists y \in b \quad \underbrace{t=(x,y)}_{\text{قابل بیان}}$$

اثبات مجموعه بودنِ $a \times b$. بنا به اصل تصریح و اصل توان، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{u \in P(P(a \cup b)) | \exists x \in a \exists y \in b \quad u=(x,y)\}$$

دقت کنید که عبارتِ $u=(x,y)$ (بنا به لمِ ۷) توسط یک فرمول در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها قابل نوشتن است؛ و این در واقع حق استفاده از اصل تصریح را به ما می‌دهد. □

به طور مشابه $a \times b \times c$ و $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$ قابل تعریف هستند.

اگر a و b مجموعه باشند به هر زیرمجموعه از $a \times b$ یک رابطه‌ی دوموضعی از a به b گفته می‌شود. فرض کنید f از a به b یک رابطه باشد. f را تابع می خوانیم هر گاه

$$\forall x \in a \exists! y \in b \quad (x,y) \in f$$

دقت کنید که اگر a, b مجموعه باشند آنگاه منظور از یک تابع از a به b را در بالا تعریف کردیم. حال فرض کنید فرمولِ $\phi(x,y)$ به صورتی باشد که

$$ZFC \vdash \forall x \exists! y \quad \phi(x,y)$$

در این صورت، اصول ZFC ثابت می‌کنند که فرمولِ ϕ گراف یک تابع را مشخص می‌کند. ولی همان مشکلِ اصل شمول دراینجا هم باقی است. آنچه توسط فرمولِ ϕ تعریف می‌شود، عبارت زیر است:

$$\{(x,y) | \phi(x,y)\}$$

گفتیم که این عبارت، لزوماً یک مجموعه نیست. پس آنچه توسط آن تعریف می‌شود، تابع نیست، ولی به علت شباهت آن به یک تابع، آن را یک **تابعال** [5] می‌نامیم. پس به طور خلاصه، اگر

$$ZFC \vdash \forall x \exists! y \quad \phi(x,y)$$

آنگاه عبارتِ

$$f = \{(x,y) | \phi(x,y)\}$$

یک تابعال است. در تعریف یک تابعال ممکن است پارامترهایی از جنس مجموعه نیز به کار رفته باشند. به بیان دقیقتر، اگر $a_1, \ldots a_n$ مجموعه باشند و $\phi(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ یک فرمول در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها باشد، آنگاه هر عبارت به صورت زیر یک تابعال است:

$$\{(x,y) | \phi(x, y, a_1, \ldots, a_n)\}.$$

که آن را می‌توان با $f : V \to V$ نشان داد.

در زیر می‌خواهم به اصل جانشانی بپردازم. در کمتر کتابِ نظریه‌ی مجموعه‌ها، اصل جانشانی به دقتی که ما می‌خواهیم بیانش کنیم، بیان شده است. ما نیز این دقت را مرهون نیمی از ترم گذراندن درس منطق هستیم. [6]

اصل ۶ (اصل جانشانی)**.** اگر f یک تابعال باشد که توسط یک فرمول در نظریه مجموعه‌ها داده‌شده‌است و a یک مجموعه باشد، آنگاه $f[a] = \{f(x) | x \in a\}$ یک مجموعه است؛ به بیان دیگر، تصویرِ تحدیدِ یک تابعال به یک مجموعه، یک مجموعه است.

$$\forall z_1, \ldots, z_n \quad \forall a \quad \forall x \quad \exists! y \quad \varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n) \to \exists t \quad (\forall z \quad z \in t \leftrightarrow \exists u \in A \quad \varphi(u, z, z_1, \ldots, z_n))$$

در بالا عبارت زیر را نوشته‌ایم:

اگر فرمولِ $\phi(x, y, a_1, \ldots, a_n)$ گراف یک تابعال از V به V را بدهد و a. یک مجموعه باشد، آنگاه تصویرِ a. تحت این تابعال، یک مجموعه است. **به بیان فنی‌تر تصویر هر مجموعه، تحت یک تابع تعریف‌پذیر، مجموعه است.**

[5] در کلاس درس، حق استفاده از پسوند ال را توجیه کرده‌ام!

[6] در درس مبانی ریاضی نیز نتوانستم آن طور که باید و شاید بدین اصل بپردازم.

مثال ۱۲. بدون استفاده از اصل توان، نشان دهید که با فرض مجموعه بودنِ a, b عبارتِ $a\times b$ یک مجموعه است.

گفتیم که

$$a\times b=\left\{\Big\{\{x\},\{x,y\}\Big\}|x\in a, y\in b\right\}$$

فرض کنید $x\in b$ یک مجموعه باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که عبارت زیر یک مجموعه است:

$$a\times\{x\}=\{(t,x)|t\in a\}$$

دقت کنید که عبارت زیر در ZFC قابل اثبات است:

$$\forall z \quad \exists! u \quad u=(z,x)$$

پس تابعال زیر قابل تعریف است:

$$f:V\to V$$

$$f:z\mapsto (z,x)$$

حال تصویر مجموعه‌ی a تحت این تابعال، بنا به اصل جانشانی، یک مجموعه است:

$$f[a]=\{(z,x)|z\in a\}=a\times\{x\}$$

می‌دانیم که

$$a\times b=\bigcup_{x\in b}\big(a\times\{x\}\big)$$

پس اگر

$$\{a\times\{x\}|x\in b\}$$

یک مجموعه باشد، بنا به اصل اجتماع و عبارت بالا، $a\times b$ نیز یک مجموعه خواهد بود و حکم مورد نظر ما اثبات خواهد شد.

دوباره دقت کنید که

$$\forall x \quad \exists! u \quad u=a\times\{x\}$$

عبارت بالا را می‌توان دقیقاً توسط یک فرمول مرتبه‌ی اول نوشت. پس

$$g:V\to V$$

$$x\overset{g}{\mapsto} a\times\{x\}$$

یک تابعال است. بنا به اصل جانشانی، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$g[b]=\{a\times\{x\}|x\in b\}$$

پس همانگونه که گفتیم بنا به اصل اجتماع، $\bigcup g[b]$ یک مجموعه است و به راحتی قابل تحقیق است که

$$\bigcup g[b]=\{(x,y)|x\in a, y\in b\}=a\times b.$$

در نظریه‌ی مجموعه‌ها بسیار پیش می‌آید که از عبارتهای $x\cup y, x\cap y, x-y, x\subseteq y$ استفاده می‌کنیم. در درس منطق آموختیم که تنها حق نوشتن چیزهایی را داریم که در زبانْ علائم مربوط بدانها را داشته باشیم. مثلا اگر می‌خواهیم بنویسیم $x\cap y$ باید یک نماد تابعی در زبانْ داشته باشیم که تعبیر آن تابعی باشد که x, y را بگیرد و $x\cap y$ را بدهد. اما از طرفی نیز می‌دانیم که می‌توان، هر جا که لازم شد، به جای نوشتنِ $x\cap y$ با استفاده از اصل تصریح از مجموعه‌ای استفاده کرد که وجود دارد و نقش $x\cap y$ را بازی می‌کند و برای بیان وجودش فقط از نمادهای زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها استفاده شده است. پس استفاده از نمادِ $x\cap y$ نباید لطمه‌ای به نظریه‌ی مجموعه‌ها وارد کند (مثلاً نباید موجب ناسازگاری آن، یا بروز مجموعه‌های جدید شود). در زیر این گفته‌ها را دقیق کرده‌ایم.

فرض کنید T یک تئوری دلخواه در زبان $\mathcal{L}$ و φ یک $\mathcal{L}$فرمول باشد. و فرض کنید که

$$T\vdash \forall x \quad \exists! y \quad \varphi(x,y)$$

به زبان $\mathcal{L}$ یک نماد تابعی f اضافه کنید.

$$\mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup\{f\}$$

نیز قرار دهید:

$$T'=T\cup\{\forall x \quad \varphi(x,f(x))\}$$

آنگاه

۱. اگر φ یک $\mathcal{L}$جمله باشد و $T'\vdash\varphi$ آنگاه $T\vdash\varphi$.

۲. برای هر $\mathcal{L}'$فرمولِ ψ' یک $\mathcal{L}$فرمولِ ψ موجود است به طوری که

$$T'\vdash \psi\leftrightarrow\psi'$$

بنا به دو نکته‌ی بالا، T' تفاوت زیادی با T ندارد. می‌گوییم T' یک توسیع تعریف‌پذیر از T است. (در صورتی که تعریف بالا به روابط و ثوابت نیز گسترش داده شود).

بنا به آنچه گفته شد می‌توان فرض کرد که در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها توابع زیر، و بسیاری توابع و روابط تعریف‌پذیر دیگر موجودند:

$$\begin{aligned}(x,y)\mapsto & x\cap y\\ & x\cup y\\ & x-y\\ & \{x,y\}\\ & x\times y\end{aligned}$$

توجه ۱۳. در اصل تصریح و جانشانی نیز می‌توان فرمول φ را شامل این توابع جدید فرض کرد.

در ادامه به یکی از سخت‌ترین (در فهم و تدریس!) اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، به نام **اصل انتظام** [۷] خواهیم پرداخت. پیش از آن دقت کنید که عبارات زیر مجموعه هستند:

$$\emptyset$$
$$\{\emptyset\}$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

این مجموعه‌ها با استفاده از مجموعه‌ی تهی و چندین بار استفاده از اصل جفت‌سازی به دست آمده‌اند. **مطلوب ما این است «همه‌ی مجموعه‌ها اینچنین خوش‌بنیاد باشند».**

تعریف ۱۴. مجموعه‌ی x را خوش بنیاد می‌نامیم هرگاه هر دنباله‌ی مانند زیر، پس از متناهی مرحله متوقف شود.

$$x \ni x_{۰} \ni x_{۱} \ni x_{۲} \ni \dots$$

در واقع عبارتی به صورت زیر، خوش‌بنیاد نیست:

$$\Big\{\big\{\{\{\dots\}\}\big\}\Big\}$$

اصل خوش‌بنیادی برای بیان این است که همه‌ی مجموعه‌ها خوش‌بنیاد هستند. اما این را باید بتوان به صورت یک اصل مرتبه‌ی اول نوشت که توان بیان این خواسته را داشته باشد.

اصل ۷ (اصل انتظام).

$$\forall x \quad \exists z \in x \quad z \cap x = \emptyset$$

صورت اصل بالا بیان می‌کند که اگر وارد یک مجموعه بشویم، و پس از وارد عضوی از آن مجموعه بشویم، و سپس وارد عضوی از آن عضو بشویم، نهایتاً به تهی می‌رسیم. برای مثال اگر

$$z = \Big\{\{۱, ۲\}, ۲\Big\} \qquad x = \bigg\{\Big\{\{۱, ۲\}, ۲\Big\}, \Big\{۱, ۲\Big\}\bigg\}$$

آنگاه

$$x \in z \qquad x \cap z = \{۱, ۲\} := y \qquad y \cap x = \emptyset$$

دوباره، آن هم به لطف منطق، می‌توانیم درباره‌ی توانائی اصل بالا برای بیان خوش‌بنیادی بحث کنیم:

اگر اصل انتظام نادرست باشد آن‌گاه مجموعه‌ی x موجود است به طوری که

$$(*) \quad \forall z \in x \quad z \cap x \neq \emptyset$$

فرض کنید که $x_{۰} \in z \cap x$. از آنجا که $x_{۰} \in x$ دوباره بنا به عبارتِ $(*)$ مجموعه‌ی $x_{۱} \in x_{۰} \cap x$ یافت می‌شود. پس

$$x \ni x_{۰} \ni x_{۱}$$

[۷] Fundierungaxiom,axiom of Regularity, axiom of well-foundedness

به این ترتیب (بنا به اصل انتخاب که در جلسه‌ی بعدی بدان خواهیم پرداخت) یک دنباله به صورت زیر یافت می‌شود:

$$x_۰ \ni x_۱ \ni x_۲ \ni x_۳ \ni \ldots$$

بنابراین نادرست بودن اصل انتظام، منجر به وجود یک مجموعه‌ی غیرخوش‌بنیاد می‌شود.

حال درباره‌ی برعکس آن صحبت می‌کنیم. فرض کنید که x غیر خوش‌بنیاد باشد.

$$x \ni x_۰ \ni x_۱ \ni \ldots$$

می‌خواهیم ببینیم که آیا این اصل انتظام را نقض می‌کند. قرار دهید

$$A = \{x_۰, x_۱, x_۲\}$$

دقت کنید که A (که نمی‌دانیم مجموعه است یا خیر) در اصل انتظام صدق نمی‌کند. زیرا اگر $x \in A$ آنگاه t به صورت x_n است. واضح است که $x_{n+۱} \in t \cap A$. پس اصل انتظام، در واقع به این خواسته‌ی ما که مجموعه‌ای غیرخوش‌بنیاد وجود نداشته باشد نزدیک است. ولی فراموش نکنیم که دلیلی نداشتیم فرض کنیم که A در بالا مجموعه است. برای این که گیج تر شوید (!) تمرین زیر را در نظر بگیرید:

تمرین ۱. با استفاده از فشردگی، نشان دهید که اگر ZFC سازگار باشد، مدلی دارد که در آن مجموعه‌ای غیرخوش‌بنیاد وجود دارد.

حل تمرین بالا آسان است. در واقع از آنجا که دنباله‌های نزولیِ به اندازه‌ی کافی بزرگ در هر مدل استاندارد از زداف‌سی پیدا می‌شوند، مدلی غیر استاندارد موجود است که در آن دنباله‌ای نزولی و نامتناهی یافت شود.

پس اصل انتظام، آنقدرهاهم در بیان خوش‌بنیادی موفق نبوده است. با این حال از اصل انتظام نتیجه می‌شود که

نتیجه ۱۵ (از اصل انتظام). اگر $x_۰ \ni x_۱ \ni x_۲ \ni \ldots$ آنگاه هیچ تابعِ تعریف‌پذیرِ f با دامنه‌ی $\mathbb{N}$ وجود ندارد به طوری‌که $f(i) = x_i$. (در غیر این‌صورت بنا به اصل جانشانی تصویر این تابع، یک مجموعه می‌شود که آن مجموعه، در اصل انتظام صدق نمی‌کند).

مثال ۱۶. همچنین از اصل انتظام نتیجه می‌شود که

۱.

$$\forall x \quad \neg(x \in x)$$

زیرا اگر $x \in x$ آنگاه

$$\exists z \in x \quad z \cap x \neq \emptyset.$$

۲. کلاس همه‌ی مجموعه‌ها مجموعه نیست. زیرا اگر مجموعه باشد، باید شامل خودش باشد و این بنا به مورد قبلی ناممکن است.

با همه‌ی این تفاسیر، ما فرض می‌کنیم که همه‌ی مجموعه‌ها خوش‌بنیاد هستند. علت این فرض این است که اگر $\mathfrak{M} \models ZFC$ آنگاه

$$\{M \in \mathfrak{M} | \text{خوش بنیاد است.} M\} \models ZFC$$

به بیان دیگر، اگر $\mathfrak{M}$ مدلی برای نظریه‌ی مجموعه‌ها [۸] باشد، مجموعه‌هایی که در آن خوش‌بنیاد هستند، خودْ مدلی برای نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌سازند. در این مدل، اصل انتظام برقرار است و همه‌ی مجموعه‌ها خوش‌بنیاد هستند.

گاهی دلیل فلسفی زیر را برای عدم توفیق اصل انتظام در بیان خوش‌بنیادی می‌آورند: اگر M یک مدل از نظریه‌ی مجموعه‌ها باشد، خودِ این مدل فکر می‌کند که در مجموعه‌هایش زنجیرهای نامتناهی نزولی وجود ندارند و هر زنجیری قرار است به زودی متوقف شود؛ ولی ناظرِ بیرون این مدل، می‌بیند که زنجیری هست که تا ابد ادامه دارد. مشابه چنین توجیه‌هایی را برای پارادوکس اسکولم می‌آورند که در ادامه اندکی درباره‌ی آن سخن گفته‌ایم.

خواهیم دید که

$$ZFC \vdash \text{یک مجموعه‌ی ناشمارا وجود دارد.}$$

حال می‌دانیم که اگر ZFC سازگار باشد، دارای مدل است. بنا به لم لونهایم اسکولم در این صورت ZFC دارای مدلی شماراست. در این مدل، مجموعه‌ای ناشمارا وجود دارد! دقت کنید که اعضای آن مجموعه، خودْ مجموعه هستند پس در واقع در این مدل شمارا، ناشمارا مجموعه وجود دارند! این را تناقض اسکولم می‌خوانند و در توجیه آن چنین دلیلی می‌آورند: مدلِ شمارای ZFC فکر می‌کند که عضوی بسیار بزرگ (ناشمارا) دارد؛ ولی از بیرون، اعضای این مدل چندان بزرگ به نظر نمی‌رسند!

تمرین ۲. نشان دهید که اصل جفت‌سازی از اصول جانشانی، توان و وجود مجموعه‌ی تهی نتیجه می‌شود.

[۸] حتی نظریه‌ی مجموعه‌ها بدون اصل انتظام