

تمرین‌های سری نهم و دهم  
درس منطق ریاضی، ترم ۳۹۸۲  
دانشگاه صنعتی اصفهان

آخرین مهلت تحویل تکلیف سری نهم و دهم: پایان روز شنبه ۷ تیرماه.  
(پس از این زمان به هیچ عنوان تکلیفی تحویل گرفته نمی‌شود).  
پاسخ به چهار تمرین کافی است.

تمرین ۱.

فرض کنید متغیر  $x$  در فرمول  $\alpha$  آزاد نباشد. نشان دهید که

$$\vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\beta)$$

$$\vdash (\alpha \rightarrow \forall x\beta) \rightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$$

تمرین ۲.

● نشان دهید اگر  $\alpha \rightarrow \beta \vdash$  آنگاه

$$\vdash \forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta.$$

● نشان دهید

$$\not\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta).$$

تمرین ۳. نشان دهید هر عدد حقیقی متناهی ناستاندارد، در فاصله‌ی بی‌نهایت کوچک از یک عدد حقیقی استاندارد است. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید  $\mathcal{R}^*$  یک مدل ناستاندارد برای تئوری کامل اعداد حقیقی باشد (مطابق آنچه در جلسه‌ی ۲۴ دیده‌ایم). فرض کنید که  $x \in \mathcal{R}^*$  یک عنصر متناهی باشد؛ یعنی یک عدد حقیقی استاندارد  $r$  موجود باشد به طوری که  $0 < x < r$ . در این صورت نشان دهید که  $x = x' + \epsilon$  به طوری که  $x' \in \mathbb{R}$  یک عدد حقیقی استاندارد است و  $\epsilon \in \mathcal{R}^*$  یک عدد حقیقی ناستاندارد بی‌نهایت کوچک است.

تمرین ۴.

۱. یک ماشین ثبت طراحی کنید که دو عدد  $m, n$  را بگیرد و  $m + n$  را محاسبه کند.

۲. یک ماشین ثبت طراحی کنید که دو عدد  $m, n$  را بگیرد و  $mn$  را محاسبه کند.

تمرین ۵. نشان دهید که مجموعه‌ی  $A \subseteq \mathbb{N}$  بازگشتی است اگر و تنها اگر هم  $A$  و هم  $A^c$  به طور بازگشتی شمارش‌پذیر باشند. توجه کنید که  $A^c = \mathbb{N} - A$ .