تمرین‌های سری ~~هفتم~~ هشتم درس منطق ریاضی / محسن خانی - دانشگاه صنعتی اصفهان

تمرین اول فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک L-ساختار باشد و $\Sigma(x)$ یک مجموعه از فرمول‌های مرتبهٔ اول در زبان L باشد که تنها متغیر آزاد همهٔ آنها x است. هم‌چنین فرض کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر تعداد متناهی فرمولِ $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)\in\Sigma(x)$ داشته باشیم

$$\mathcal{M}\models\exists x\,(\varphi_1(x)\wedge\varphi_2(x)\wedge\dots\wedge\varphi_n(x))$$

نشان دهید که در این صورت L-ساختارِ $\mathcal{M}'$ موجود است به طوری که $\mathcal{M}'\models Th(\mathcal{M})$ و در M' (جهانِ $\mathcal{M}'$) عنصری مانند d موجود است که به طور همزمان برای هر فرمولِ $\varphi(x)\in\Sigma(x)$ داریم $\mathcal{M}'\models\varphi(d)$.

مهلت تحویل:

تمرین‌های اول و دوم: شنبه ۱۷ خرداد

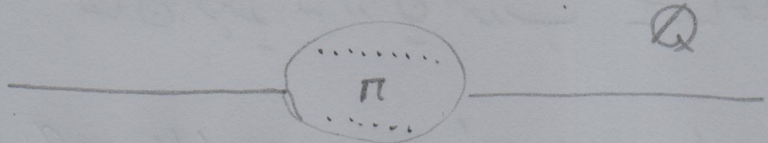
تمرین‌های سوم و چهارم: شنبه ۲۴ خرداد

تمرین دوم ساختار $(\mathbb{Q},<)$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $\pi \notin \mathbb{Q}$.

منظور از شکاف π در $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ فرمولهای زیر است:

$$\{\, a<x<b \mid a,b\in\mathbb{Q} ,\ (\mathbb{R},<)\models a<\pi<b \,\}$$

نشان دهید که ساختار $(M,<)$ موجود است به طوری که $(M,<)\models Th(\mathbb{Q},<)$ و $\mathbb{Q}\subseteq M$ و در M بی‌نهایت عنصر در شکاف π روی $\mathbb{Q}$ قرار دارند.



تمرین سوم ساختار $\mathcal{N}=(\mathbb{N},+,0,1,<)$ را در نظر بگیرید. الف) نشان دهید که ساختار $\mathcal{N}'$ موجود است به طوری که $\mathcal{N}'\models Th(\mathcal{N})$ و در N' عنصری مانند d موجود است به طوری که به ازای هر n:

$$d>1$$
$$d>1+1$$
$$d>1+1+1$$
$$\vdots$$
$$d>\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ مرتبه}}$$
$$\vdots$$

ب) نشان دهید در N' کوچکترین عنصر d با این ویژگی وجود ندارد.

تمرین چهارم فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبهٔ اول باشد و $\mathbb{K}$ یک کلاس از $\mathcal{L}$-ساختارها باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

۱) کلاس $\mathbb{K}$ قابل اصل‌بندی است هرگاه یک $\mathcal{L}$-تئوری T موجود باشد به طوری که

$$\mathbb{K}=\left\{\mathcal{M} \;\middle|\; \begin{array}{l}\mathcal{M}\ \text{یک}\ \mathcal{L}\text{-ساختار است}\\ \text{و}\ \mathcal{M}\models T\end{array}\right\}$$

۲) کلاس $\mathbb{K}$ دارای یک اصل‌بندی متناهی است هرگاه یک $\mathcal{L}$-تئوری T با متناهی جمله موجود باشد به طوری که شرط بالا برقرار باشد. (یعنی $\mathbb{K}$ قابل اصل‌بندی با یک تئوری متناهی باشد).

الف) نشان دهید که کلاس $\mathbb{K}$ از $\mathcal{L}$-ساختارها دارای یک اصل‌بندی متناهی است اگر و تنها اگر کلاس $\mathbb{K}$ و کلاس $\mathbb{K}^c$ هر دو قابل اصل‌بندی باشند.

ب) از الف نتیجه بگیرید که کلاس مجموعه‌های نامتناهی قابل اصل‌بندی است اما دارای اصل‌بندی متناهی نیست (در زبان $\mathcal{L}=\emptyset$).

توجه

$$\mathbb{K}^c=\left\{\mathcal{M} \;\middle|\; \begin{array}{l}\mathcal{M}\ \text{یک}\ \mathcal{L}\text{-ساختار}\\ \text{است و}\ \mathcal{M}\not\models T\end{array}\right\}$$