

تمرین‌های سری پنجم و ششم
 جلسه‌ی ۱۱ - مباحث تئوری‌های کامل و استلزام منطقی
 درس منطق ریاضی، ترم ۳۹۸۲
 دانشگاه صنعتی اصفهان

آخرین مهلت تحویل تکلیف سری پنجم و ششم: دو تمرین اول پنج‌شنبه ۱ خرداد، دو تمرین دوم پنج‌شنبه ۸ خرداد.

توجه کنید که این بار پاسخ به همه‌ی تمرینها الزامی است.

تمرین ۱. آیا عبارت زیر برقرار است؟

$$(T \models \varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (T \models \varphi \Rightarrow T \models \psi)$$

هر سمتی را که برقرار است اثبات کنید و هر سمتی که برقرار نیست، برقرار نبودنش را در صورت نیاز با آوردن مثال، اثبات کنید. (اختیاری: آیا می‌توانید تفاوت کاربرد فلشهای ساده و فلشهای دوخطه را توضیح دهید؟)

تمرین ۲. اگر T یک تئوری کامل باشد و $\mathcal{M} \models T$ ، نشان دهید T و $Th(\mathcal{M})$ مدل‌های یکسانی دارند. یادآوری می‌کنیم که

$$Th(\mathcal{M}) = \{ \phi \mid \mathcal{M} \models \phi \text{ و } \phi \text{ جمله است} \}.$$

تمرین ۳. فرض کنید که L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد و T یک تئوری در این زبان. فرض کنید ثابت c در زبان L نباشد و زبان $L' = L \cup \{c\}$ را در نظر بگیرید.

۱. نشان دهید که هر L ساختار \mathcal{M} را می‌توان به یک L' ساختار \mathcal{M}' گسترش داد به طوری که $M = M'$.

۲. فرض کنید که $\phi(x)$ یک فرمول با متغیر آزاد x باشد. نشان دهید که اگر $T \models_{L'} \phi(c)$ آنگاه $T \models_L \forall x \phi(x)$.

تمرین ۴.

۱. در یک زبان دلخواه، یک تئوری T و یک جمله‌ی ϕ مثال بزنید به طوری که (به صورت همزمان) $T \not\models \neg\phi$ و $T \not\models \phi$.

۲. برای هر تئوری دلخواه T و جملات دلخواه ϕ و ψ نشان دهید که

(A)

$$(T \models \phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (T \cup \{\phi\} \models \psi)$$

(ب) $T \not\models \phi$ اگر و تنها اگر $T \cup \{\neg\phi\}$ دارای مدل باشد.

(ج) $T \models \phi$ اگر و تنها اگر $T \cup \{\neg\phi\}$ هیچ مدلی نداشته باشد.