

تمرین‌های سری چهارم

جلسات ۸، ۹ و ۱۰، مباحث فرمول‌های مرتبه‌ی اول، تعریف پذیری و اتومرفیسم‌ها

درس منطق ریاضی، ترم ۳۹۸۲

دانشگاه صنعتی اصفهان

آخرین مهلت تحویل تکلیف سری چهارم: پایان روز شنبه ۲۰ اردیبهشت ماه. پس از این زمان به هیچ عنوان تکلیفی تحویل گرفته نمی‌شود. برای دریافت نمره‌ی کامل به حداقل دو تمرین از تمرینهای زیر پاسخ صحیح دهید. پاسخها را با قالب پی‌دی‌اف بارگذاری کنید.

تمرین ۱. زبان $L = \{+, \times, 1\}$ و ساختار $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 1)$ را در نظر بگیرید. با رعایت دقیق قواعد فرمول‌نویسی مرتبه‌ی اول (نحوه‌ی پرانتزگذاری و استفاده‌ی صحیح از علائم زبانی)

۱. فرمول $\varphi(x, y)$ را به گونه‌ای بنویسید که

$$\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \mathfrak{N} \models \varphi(m, n)\} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : (m, n) = 1\}.$$

۲. فرمول $\psi(x, y, z)$ را به گونه‌ای بنویسید که

$$\{(m, n, k) \in \mathbb{N}^3 : \mathfrak{N} \models \psi(m, n, k)\} = \{(m, n, k) \in \mathbb{N}^3 : [m, n] = k\}.$$

پرانتز و گروه به ترتیب برای نشان دادن ب‌م‌م و کم‌م استفاده شده‌اند.

تمرین ۲. آیا در ساختار $\mathfrak{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه‌ی تک‌عضوی $X = \{i\}$ قابل تعریف است؟ به بیان دیگر آیا می‌توان یک فرمول $\phi(x)$ به گونه‌ای نوشت که

$$\{x \in \mathbb{C} : \mathfrak{C} \models \phi(x)\} = \{i\}?$$

تمرین ۳. با در نظر گرفتن ساختار $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +)$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱. آیا در این ساختار عمل ضرب قابل تعریف است؟ به بیان دیگر آیا می‌توان یک فرمول $\phi(x, y, z)$ به گونه‌ای نوشت که

$$\{(m, n, k) : \mathfrak{N} \models \phi(m, n, k)\} = \{(m, n, k) \mid k = m \times n\}$$

دقت کنید که در نوشتن چنین فرمولی از علامت ضرب نباید استفاده شود.

۲. آیا مجموعه‌ی تک‌عضوی $\{0\}$ قابل تعریف است؟

۳. آیا مجموعه‌ی دو عضوی $\{0, 1\}$ قابل تعریف است؟

تمرین ۴. در زبان $L = \{<\}$ جمله‌ی φ را به گونه‌ای بنویسید که

$$(\mathbb{N}, <) \not\models \varphi, \quad (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_{\text{قاموسی}}) \models \varphi.$$

(نوشتن φ به گونه‌ای که

$$(\mathbb{N}, <) \models \varphi, \quad (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_{\text{قاموسی}}) \not\models \varphi$$

نیز بلامانع است.)