تمرین‌های سری سوم

درس منطق ریاضی، ترم ۳۹۸۲

دانشگاه صنعتی اصفهان

آخرین مهلت تحویل تکلیف سری سوم: پایان روز چهارشنبه ۱۰ اردیبهشت ماه.

(پس از این زمان به هیچ عنوان تکلیفی تحویل گرفته نمی‌شود.)

برای دریافت نمره‌ی کامل به حداقل دو تمرین از تمرینهای زیر پاسخ صحیح دهید.

تمرین ۱. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد و $\mathfrak{M}$ یک L ساختار با جهان M باشد و داشته‌باشیم $a_1, ..., a_n \in M$. سه Lفرمول $\varphi_1(x_1, ..., x_n), \varphi_2(x_1, ..., x_n), \varphi_3(x_1, ..., x_{n+1})$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که

الف) $\mathfrak{M} \models \varphi_1(a_1, ..., a_n) \to \varphi_2(a_1, ..., a_n)$ اگر و آنگاه $\mathfrak{M} \models \varphi_1(a_1, ..., a_n)$ $\mathfrak{M} \models \varphi_2(a_1, ..., a_n)$.

ب) $\mathfrak{M} \models \varphi_3(a, a_1, ..., a_n)$ برای هر عنصر $a \in M$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \forall x \quad \varphi_3(x, a_1, ..., a_n)$.

ج) توضیح دهید که در بخش الف، چه تفاوتی میان فلشهای $\to$ و $\Rightarrow$ وجود دارد.

تمرین ۲. در زبانِ $L = \{f, R\}$ که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی و R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است، فرمول $\phi(x, y, z)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\exists x \exists y R(f(x, y), z) \wedge f(x, z) = z \to \forall z \Big((R(x, z) \to R(f(x, x), y) \Big).$$

با توجه به تعریف استقرائی فرمولها، بیان کنید که این فرمول چگونه از اجزای کوچکتر ساخته شده است (یعنی تک‌تک‌اجزای آن را مشخص کنید و با تعریف استقرائی فرمولها، این فرمول را بازسازی کنید). می‌توانید این کار را با استفاده از یک درخت انجام دهید. سپس ساختارِ $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \leq)$ را در نظر بگیرید. تعبیر $\phi(۰, ۲, ۴)$ در این ساختار چگونه است. آیا $\mathfrak{N} \models \phi(۰, ۲, ۴)$؟

تمرین ۳. فرض کنید $L = \{R\}$ یک زبان مرتبه اول باشد. Lساختار مرتبه‌ی اول $\mathfrak{M} = (M, R^{\mathfrak{M}})$ را در نظر بگیرید. Lجمله‌های φ_1, φ_2 را به گونه‌ای بنویسید که

الف) $\mathfrak{M} \models \varphi_1 \Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی با دقیقاً سه کلاس باشد و همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی $R^{\mathfrak{M}}$ دارای دقیقاً دو عضو باشند.

ب) $\mathfrak{M} \models \varphi_2 \Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد که تنها یک کلاس دو عضوی و یک کلاس سه عضوی دارد.

ج) آیا می‌توانید L جمله‌های $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ را به صورت زیر بنویسید؟

$\mathfrak{M} \models \varphi_3$ اگروتنهااگر $R^{\mathfrak{M}}$ به ازای هر عدد طبیعیِ n دارای یک کلاس n عضوی باشد.

$\mathfrak{M} \models \varphi_4 \Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}}$ رابطه‌ی بی‌نهایت کلاس هم‌ارزی متفاوت داشته باشد.

$\mathfrak{M} \models \varphi_5 \Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}}$ رابطه‌ی دارای یک کلاس هم‌ارزی نامتناهی باشد.

تمرین ۴. در هر کدام از موارد زیر یک زبان مناسب L انتخاب کنید و یک فرمول مناسب φ در آن زبان بنویسید به گونه‌ای که

الف) اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ و M متناهی باشد، آنگاه $|M| \| ۵$. (یعنی عدد ۵ سایز مجموعه‌ی مدل را عاد کند.)

ب)اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ و M متناهی باشد، آنگاه $|M| = n^۲$ (به بیان دقیق‌تر جمله‌ی ϕ به گونه‌ای باشد که اگر $\mathfrak{M} \models \phi$ و $|M|$ متناهی باشد، آنگاه $|M|$ عددی مربعی باشد. همچنین برای هر عدد مربعیِ $n^۲$ فرمولِ ϕ مدلی داشته باشد که اندازه‌ی جهان آن $n^۲$ باشد.)