تمرین‌های سری دوم

درس منطق ریاضی، ترم ۳۹۸۲

دانشگاه صنعتی اصفهان

آخرین مهلت تحویل تکلیف های سری اول و دوم : پایان روز دوشنبه، ۱ اردیبهشت ماه، ساعت ۱۲ ظهر

(پس از این زمان به هیچ عنوان تکلیفی تحویل گرفته نمی‌شود.)

برای دریافت نمره‌ی کامل به حداقل دو تمرین از تمرینهای زیر پاسخ صحیح دهید.

فرض کنید $L = \{f, g, c_1, c_2\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن f, g نمادهای تابعی دو موضعی و c_1, c_2 نمادهایی برای دو ثابت هستند. دو Lساختار زیر را در نظر بگیرید:

- $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, 0, 1)$ که $R = \{m + n\sqrt{2} | m, n \in \mathbb{Z}\}$ و اعمال جمع و ضرب و ثوابتِ صفر و یک، همان اعمال و ثوابت در اعداد حقیقی هستند و $f^{\mathfrak{R}} = +$ و $g^{\mathfrak{R}} = \cdot$ و $c_1^{\mathfrak{R}} = 0$ و $c_2^{\mathfrak{R}} = 1$.
- $\mathfrak{S} = (S, \oplus, \otimes, 0, 1)$ که $S = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ 2n & m \end{pmatrix} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ و $\oplus, \otimes$ (به ترتیب از راست به چپ) ضرب و جمع ماتریسها هستند و صفر و یک به ترتیب بدین صورت هستند: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و گرفته‌ایم: $f^{\mathfrak{S}} = \oplus$ و

$$g^{\mathfrak{S}} = \otimes \text{ و } c_1^{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } c_2^{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرین ۱. نشان دهید تابع h با ضابطه‌ی زیر یک Lایزومرفیسم است.

$$h : R \to S \qquad h(m + n\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} m & n \\ 2n & m \end{pmatrix}$$

تمرین ۲. در تمرین بالا، ترم $t = f\big(g(x_1, x_2), g(y, y)\big)$ را در نظر بگیرید. به طور دقیق بیان کنید که $t^{\mathfrak{R}}$ و $t^{\mathfrak{S}}$ چه توابعی هستند.

تمرین ۳. فرض کنید $L = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$ یک زبان مرتبه اول باشد. ساختار $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1)$ را به عنوان یک Lساختار در نظر بگیرید.

- نشان دهید که برای هر ترمِ $t(x_1, \ldots, x_n)$ در این زبان، یک چندجمله‌ای n متغیره‌ی $p(x_1, ..., x_n)$ با ضرایب در $\mathbb{Z}$ موجود است به طوری که برای هر $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ داریم

$$t^{\mathfrak{R}}(a_1, \ldots, a_n) = p(a_1, \ldots, a_n).$$

- فرض کنید که $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ یک فرمول در این زبان باشد که هیچ سوری ندارد (یعنی با استفاده از قوانین استقرائی فرمول‌سازی غیر از قوانین مربوط به سورها ساخته شده باشد). با توجه به قسمت قبل، مجموعه‌ی

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{R} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)\}$$

به چه صورتی است؟

- فرض کنید $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ یک فرمول بدون سور باشد و $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. در این صورت مجموعه‌ی

$$\{x \in \mathbb{R} : \mathfrak{R} \models \phi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$$

به چه صورتی است؟

تمرین ۴. • فرض کنید $L = \{+, ., 0, 1\}$ یک زبان مرتبه اول باشد و ساختار اعداد طبیعی را به همراه اعمال مورد نیاز در زبان در نظر بگیرید. صورت حدس گلدباخ در زیر را به عنوان یک فرمول مرتبه اول در زبان L بنویسید:
هر عدد طبیعی زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

- در زبانِ $L = \{R\}$ که در آن R نمادی برای یک رابطه‌ی دوموضعی است، جمله‌ای بنویسید که بیانگر این باشد که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است که دقیقاً سه کلاس هم‌ارزی دارد.