

تمرین‌های سری اول

درس منطق ریاضی، ترم ۳۹۸۲

دانشگاه صنعتی اصفهان

آخرین مهلت تحویل تکلیف: روز دوشنبه، ۵ اسفند ماه، راس ساعت ۱۲ ظهر.
(پس از این زمان به هیچ عنوان تکلیفی تحویل گرفته نمی‌شود.)

برای دریافت نمره‌ی کامل به حداقل دو تمرین از تمرینهای زیر پاسخ صحیح دهید.

فرض کنید L یک زبان مرتبه اول و \mathfrak{M} و \mathfrak{N} دو L ساختار مرتبه اول باشند. به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

تمرین ۱. مجموعه‌ی $M \times N = \{(m, n) | m \in M, n \in N\}$ را با تعبیر مناسب علائم زبانی به یک L ساختار تبدیل کنید و L ساختار حاصل را با $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ نشان دهید. تعبیر علائم باید به گونه‌ای باشد که توابع $\pi_M : M \times N \rightarrow M, \pi_M(m, n) = m$ و $\pi_N : M \times N \rightarrow N, \pi_N(m, n) = n$ همومرفیسم باشند.

تمرین ۲. فرض کنید $L = \{R\}$ حاوی یک نماد رابطه‌ای دو موضعی باشد و $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو L ساختار باشند به گونه‌ای که $R^{\mathfrak{M}}, R^{\mathfrak{N}}$ رابطه‌ی هم‌ارزی باشند. نشان دهید که $R^{\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}}$ (به گونه‌ای که در تمرین یک تعریف می‌شود) یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

تمرین ۳. فرض کنید $L = \{f, c\}$ حاوی یک نماد تابع دو موضعی f و یک نماد ثابت c باشد. نشان دهید اگر L ساختارهای $\mathfrak{M} = (M, f^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}})$ و $\mathfrak{N} = (N, f^{\mathfrak{N}}, c^{\mathfrak{N}})$ دو گروه باشند، آنگاه $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ (به گونه‌ای که در تمرین یک تعریف می‌شود) نیز یک گروه است.

تمرین ۴. فرض کنید $L = \{+, \cdot, 1\}$ حاوی دو نماد تابع دو موضعی $+$ و \cdot و دو نماد ثابت 1 و 0 باشد. نشان دهید اگر L ساختارهای $\mathfrak{M} = (M, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}})$ و $\mathfrak{N} = (N, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}}, 0^{\mathfrak{N}})$ میدان باشند، آنگاه $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ (به گونه‌ای که در تمرین یک تعریف می‌شود) میدان نیست.