اصلاح اثبات قضیهٔ اساسی گروه‌های آبلی   ج نوزدهم

<u>مرحلهٔ اول</u>   فرض کنید $a_1 \in G$ عنصری با مرتبهٔ ماکزیمال باشد و مرتبهٔ a_1 برابر با p^{n_1} باشد. فرض کنید $b \in G-\langle a_1\rangle$ عنصری باشد که مرتبه‌ی $\bar{b}$ در $\frac{G}{\langle a_1\rangle}$ ماکزیمال باشد؛ یعنی کوچکترین عدد λ به طوری که $\lambda b \in \langle a_1\rangle$ ماکزیمال باشد. توجه کنید که λ توانی از p است؛ زیرا اندازه‌ی $\frac{G}{\langle a_1\rangle}$ توانی از p است. پس فرض کنید $\lambda = p^{n_2}$.

توجه کنید که $n_2 \leq n_1$. علت: مرتبه‌ی a_1 برابر با p^{n_1} است و این حداکثر مرتبه‌ی ممکن است. مرتبه‌ی هر عنصر دیگر توانی از p است و کوچکتر یا مساوی با p^{n_1} است. پس مرتبه‌ی هر عنصر دیگر p^{n_1} را عاد می‌کند. به طور خاص $p^{n_1} b = 0$. پس $p^{n_1} b \in \langle a_1\rangle$. پس $\lambda = p^{n_2} \leq p^{n_1}$.

حال فرض کنید $\lambda b = \mu_1 a_1$. ادعا می‌کنیم که $\lambda | \mu_1$:

$$\lambda b = \mu_1 a \Rightarrow \frac{p^{n_1}}{\lambda} \times \lambda b = \frac{p^{n_1}}{\lambda} \mu_1 a_1 \Rightarrow \frac{p^{n_1}}{\lambda} \mu_1 a_1 = 0 \Rightarrow$$

$$p^{n_1} \Big| \frac{p^{n_1}}{\lambda} \mu_1 \Rightarrow \frac{\mu_1}{\lambda} \in \mathbb{N}$$

حال عنصر $a_2 = b - \frac{\mu_1}{\lambda} a_1$ را در نظر بگیرید و توجه کنید که

$ord(\bar{a}_2) = \lambda = p^{n_2}$ در $\frac{G}{\langle a_1 \rangle}$. همچنین $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle$.

مرحله‌ی دوم: عنصر $b' \in G - \langle a_1, a_2 \rangle$ را در نظر بگیرید به طوری که مرتبه‌ی $\bar{b'}$ در $\frac{G}{\langle a_1, a_2 \rangle}$ ماکزیمال باشد. قرار دهید مرتبه‌ی $\bar{b'} = p^{n_3} = \lambda'$

توجه کنید که $n_3 \leq n_2$.

علت: می‌دانیم که $p^{n_2} b' \in \langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_1, a_2 \rangle$ زیرا p^{n_2} مرتبه‌ی ماکزیمال در $\frac{G}{\langle a_1 \rangle}$ است. بنابراین $p^{n_3} \mid p^{n_2}$.

حال فرض کنید $\lambda' b' = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2$. ادعا می‌کنیم که $\lambda' \mid \mu_1$. $\lambda' \mid \mu_2$

مشابه پایین با ضرب در $\frac{p^{n_1}}{\lambda'}$

اثبات ادعا

$$\lambda' b' = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 \Rightarrow$$

$$\overset{\in \langle a_1 \rangle}{\frac{p^{n_2}}{\lambda'} \times \lambda' b'} = \overset{\in \langle a_1 \rangle}{\frac{p^{n_2}}{\lambda'} \times \mu_1 a_1} + \frac{p^{n_2}}{\lambda'} \mu_2 a_2 \Rightarrow$$

$$\frac{p^{n_2}}{\lambda'} \mu_2 a_2 \in \langle a_1 \rangle \Rightarrow p^{n_2} \mid p^{n_2} \frac{\mu_2}{\lambda'} a_2 \Rightarrow \frac{\mu_2}{\lambda'} \in \mathbb{N}$$

ادامه به صورت مشابه ... ...