

تمرینات تحویلی سربهای پنجم و ششم درس نظریه گالوا

مهلت تحویل: تمرینهای ۱ و ۲ شنبه ۱۰ خرداد، ساعت ۲۴، تمرینهای ۳ و ۴ شنبه ۱۷ خرداد ساعت ۲۴

- لطفا پاسخ تمرین‌های خود را پیش از پایان مهلت تحویل، در سامانه الکترونیکی دروس بارگذاری کنید.
 - نام فایل ارسالی شما باید به شکل **Galois-ga-hb** باشد که در آن a شماره گروه شما و b شماره تکلیف است. برای مثال، نام فایل تکلیف سری اول گروه ۳ باید Galois-g3-h1 باشد.
- تمرین ۱.** فرض کنید K یک میدان و f یک چندجمله‌ای از درجه p در $K[X]$ باشد که p یک عدد اول است. همچنین، فرض کنید برای هر توسیع میدانی $K \subseteq L$ ، اگر f در L یک ریشه داشته باشد، آنگاه f به طور کامل در L شکافته شود. نشان دهید که در این صورت یا f در $K[X]$ تحویل‌ناپذیر است یا f در K دارای یک ریشه است.
- تمرین ۲.** فرض کنید $K \subseteq L$ یک توسیع نرمال و p یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر در $K[X]$ باشد. نشان دهید اگر p در L تحویل‌پذیر باشد، آنگاه p در L به عوامل تحویل‌ناپذیر با درجه یکسان تجزیه می‌شود. به ویژه، اگر p در L یک ریشه داشته باشد، آنگاه p در L به طور کامل شکافته می‌شود.
- تمرین ۳.** فرض کنید $K \subseteq L$ یک توسیع نرمال باشد، $a, a' \in L$ ریشه‌های چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر f در $K[X]$ و $b, b' \in L$ ریشه‌های چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر g در $K[X]$ باشند. درستی گزاره زیر را بررسی کنید:
اتومرفیسم $\sigma \in Gal(L : K)$ موجود است چنان که $\sigma(a) = a'$ و $\sigma(b) = b'$.
- تمرین ۴.** فرض کنید $K \subseteq L$ یک توسیع گالوایی باشد، $[L : K] = n$ و p یک شمارنده اول n باشد. نشان دهید زیرمیدان E از L موجود است چنان که $[L : E] = p$.