- لطفا هرگروه پاسخ تمرین‌ها را به صورت تایپ‌شده آماده کرده و به آدرس ایمیل pardis.semnani1998@gmail.com ارسال نماید.

- لطفا موضوع ایمیل ارسالی خود را به شکل Galois-ga-hb بنویسید که در آن a شماره گروه شما و b شماره تکلیف است. برای مثال، گروه ۳ تکلیف سری اول را باید در ایمیلی با موضوع Galois-g3-h1 ارسال کند.

تمرین ۱. فرض کنیم $\phi : K \longrightarrow L$ یک هومومرفیسم ناصفر و K یک میدان باشد. نشان دهید ϕ یک نشاندن است.

تمرین ۲. نشان دهید برای هر دو عضو x و y از یک میدان با مشخصه متناهی p رابطه زیر برقرار است:

$$(x-y)^p = x^p - y^p$$

تمرین ۳. با $Aut(L)$ مجموعه‌ی همه‌ی اتومرفیسمهای میدان L را نشان می‌دهیم (که این مجموعه با ترکیب توابع تشکیل گروه می‌دهد). گروه‌های $Aut(\mathbb{Q})$ و $Aut(\mathbb{Z}_p)$ را تعیین کنید.

تمرین ۴. فرض کنیم $\Gamma = \{ a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z} \}$ که در آن $i = \sqrt{-۱}$.

الف) نشان دهید Γ همراه با جمع و ضرب معمولی یک حوزه صحیح است.

ب) نشان دهید Γ یک حوزه اقلیدسی است.

(راهنمایی: از تابع

$$\delta : \Gamma \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\delta(a+bi) = a^۲ + b^۲$$

استفاده کنید.)

تمرین ۵. نشان دهید $\mathbb{Z}[x]$ یک دامنه ایده‌آل اصلی نیست.

تمرین ۶. فرض کنیم K یک میدان نامتناهی باشد و $f, g \in K[x]$ دو چندجمله‌ای از درجه n باشند. اگر $\alpha_۱, \ldots, \alpha_{n+۱} \in K$ متمایز باشند و $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ برای هر $i \in \{ ۱, \ldots, n+۱ \}$، نشان دهید $f = g$.

تمرین ۷. فرض کنیم $L \subseteq M$ و $K \subseteq L$ دو توسیع میدانی باشند. همچنین، فرض کنیم $[M:K]$ متناهی است. نشان دهید اگر $[M:K] = [M:L]$، آنگاه $L = K$.

تمرین ۸. نشان دهید حداقل یک عدد حقیقی متعالی (روی $\mathbb{Q}$) وجود دارد.

تمرین ۹. فرض کنید α و β دو عدد متعالی روی $\mathbb{Q}$ باشند و γ جبری باشد. هر یک از گزاره‌ها زیر را در صورت درست بودن، اثبات و در صورت نادرست بودن، با یک مثال نقض رد کنید.

الف) $\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}(\beta)$

ب) $\alpha\beta$ متعالی است.

ج) $\alpha + \gamma$ جبری است.